Herramientas computacionales en álgebra conmutativa - Parte 3

Santiago Laplagne - Mercedes Pérez Millán

Universidad de Buenos Aires

Encuentro RSME-UMA, Diciembre 2017

Ideal de una variedad

- Recordemos,
  $\mathbf{V}(I) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Bbbk^n : f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ \forall f \in I\}$, la variedad del ideal I.
- Recíprocamente, para un conjunto $S \subset \Bbbk^n$, definimos

$$\mathbf{I}(S) = \{f \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_n] : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

- Si $f^n \in \mathbf{I}(S) \Rightarrow f \in \mathbf{I}(S)$.

Radical de un ideal

- Dado un ideal I, definimos

$$\sqrt{I} = \{f \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_n] : f^m \in I \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$$

- Decimos que I es radical si $I = \sqrt{I}$.
- $\mathbf{I}(S)$ es un ideal radical para cualquier conjunto $S \subset \Bbbk^n$.
- $\mathbf{V}(\sqrt{I}) = \mathbf{V}(I)$.

Teorema (Hillbert Nullstellensatz)

Para cualquier ideal $I \subset \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$$

En Singular:

Para $I = \langle -xz^3 - yz^3 - 3z^4 + 3z^3 - z^2, xz^2 - xz + y^2, x + y + z^2 \rangle$, queremos determinar $\mathbf{V}(I)$.

```
> ring R=0,(x,y,z),lp;

> ideal I = -xz3-yz3-3z4+3z3-z2, xz2-xz+y2, x+y+z2;

> groebner(I);

> ideal J = radical(I);

> groebner(J);
```

A partir de los resultados obtenidos, determinar $\mathbf{V}(I)$.

Ideales 0-dimensionales

Un ideal I es 0-dimensional si $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$ es un conjunto finito de puntos.

Proposición

I es 0-dimensional si y solo si $I \cap \Bbbk[X_i] = \langle g_i(X_i) \rangle$, $g_i \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Algoritmo para calcular el radical de un ideal 0-dimensional

1. $I \subset \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ ideal
2. $f_i(X_i) \in I \cap \Bbbk[X_i]$, $f_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$
3. $g_i = \sqrt{f_i}$, la parte libre de cuadrados de f_i
4. $\sqrt{I} = \langle I, g_1, \dots, g_n \rangle$

Procedimientos en Singular

```
proc sumaHastaN(int n)
{
  int i;
  int s = 0;
  for(i = 1; i<= n; i++)
  {
    s = s + i;
  }
  return(s);
}
```

Funciones auxiliares: polinomio libre de cuadrados

```
proc libreCuadrados(poly f, int i)
{
  poly g = f / gcd(f, diff(f,var(i)));
  return(g);
}
```

Funciones auxiliares: producto de todas las variables menos una

```
proc todasMenosUna(int ind)
{
  int i;
  poly f = 1;
  for(i = 1; i<= nvars(basering); i++)
  {
    if(ind <> i)
    {
      f = f * var(i);
    }
  }
  return(f);
}
```

Radical de un ideal 0-dimensional

Algoritmo para calcular el radical de un ideal 0-dimensional

1. $I \subset \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ ideal 0-dimensional
2. $f_i(X_i) \in I \cap \Bbbk[X_i]$, $f_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$
3. $g_i = \sqrt{f_i}$, la parte libre de cuadrados de f_i
4. $\sqrt{I} = \langle I, g_1, \ldots, g_n \rangle$

Lema de la forma

Teorema

Si $I = \sqrt{I}$, $V(I) = \{x^1, \ldots, x^N\}$ *y* $x_1^i \neq x_1^j$ $\forall i \neq j$, *entonces*

$$I = \langle p(x_1), x_2 - p_2(x_1), \ldots, x_n - p_n(x_1) \rangle.$$

Ideales primos y variedades irreducibles

Ideales radicales de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$	$\Leftrightarrow$	Variedades de $\mathbb{C}^n$

- Decimos que V es **irreducible** si

$$V = V_1 \cup V_2 \quad \Rightarrow \quad V = V_1 \quad \text{o} \quad V = V_2$$

- **Proposición**: Toda variedad en $\mathbb{C}^n$ es unión de finitas variedades irreducibles.

Ideales primos y variedades irreducibles

$$\begin{array}{ccc} \text{Ideales radicales} & \Leftrightarrow & \text{Variedades} \\ \text{de } \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] & & \text{de } \mathbb{C}^n \end{array}$$

- Decimos que I es **primo** si

$$f.g \in I \quad \Rightarrow \quad f \in I \quad \text{o} \quad g \in I$$

- **Proposición**: Todo ideal *radical* en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ es intersección de finitos ideales primos.

Ideales primos y variedades irreducibles

$$\begin{array}{ccc} \text{Ideales primos} & \Leftrightarrow & \text{Variedades irreducibles} \\ \text{de } \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] & & \text{de } \mathbb{C}^n \end{array}$$

$$I = \sqrt{I} \quad \Rightarrow \quad V(I) = V_1 \cup \ldots \cup V_N$$

$$\Rightarrow I = I(V_1) \cap \ldots \cap I(V_N) = P_1 \cap \ldots \cap P_N$$

¿Y si $I \neq \sqrt{I}$?

- Sea Q un ideal, Q se dice **primario** si

$$f.g \in Q \quad \Rightarrow \quad f \in Q \quad \text{o} \quad g \in \sqrt{Q}$$

- **Proposición**: Todo ideal (propio) I admite una descomposición primaria (minimal)

$$I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s.$$

En Singular:

Para $I = \langle xz - y^2, x^3 - yz, z^2 - x^2y \rangle$, veamos que I es primo pero I^2 no es primario.

```
> LIB "primdec.lib";

> ring R=0,(x,y,z),lp;

> ideal I = xz-y2, x3-yz, z2-x2y;

> primdecGTZ(I);

> ideal J = I^2;

> primdecGTZ(J);
```

Ejercicio: Encontrar $p \in J$ tal que $p = fg$ con $f \notin J$ y $g \notin \sqrt{J}$.

Descomposición de ideales radicales 0-dimensionales

Ingredientes:

- Decimos que X_n separa puntos de $\mathbf{V}(I)$ si todos los puntos de $\mathbf{V}(I)$ tienen distinta coordenada X_n.
- Si $\langle f, g \rangle = \langle 1 \rangle$ y $fg \in I$, entonces $I = I + \langle f \rangle \cap I + \langle g \rangle$.
- Si I 0-dimensional y $\langle g \rangle = I \cap \Bbbk[X_n]$, $g = g_1^{m_1} \dots g_s^{m_s}$ la factorización en irreducibles, entonces

$$I = \bigcap_{i=1}^{m} I + \langle g_i^{m_i} \rangle$$

- Si I ideal radical, $I = \cap_{i=1}^{s} P_i$, P_i primo
- Si X_n separa puntos ,
  - $\sqrt{I} = \cap_{i=1}^{m} I + \langle g_i \rangle$, descomposición prima de $\sqrt{I}$.
  - $I = \cap_{i=1}^{m} I + \langle g_i^{m_i} \rangle$, descomposición primaria de $\sqrt{I}$.

Ejercicio: Implementar en Singular este algoritmo para la descomposición primaria de un ideal 0-dimensional (suponiendo que X_n separa puntos de la variedad).