Herramientas computacionales en álgebra conmutativa - Parte 2

Santiago Laplagne - Mercedes Pérez Millán

Universidad de Buenos Aires

Encuentro RSME-UMA, Diciembre 2017

Suma de ideales

- Dados $I, J \subset \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$, se define la suma

$$I + J = \{f + g : f \in I, g \in J\}$$

- $I + J$ es un ideal (ejercicio).
- Como todo ideal contiene a 0, $I, J \subset I + J$.
- Si $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ y $J = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$,

$$I + J = \langle f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \rangle$$

  (no requiere calcular bases de Groebner)
- Análogamente al caso de espacios vectoriales definidos por ecuaciones,
$$\mathbf{V}(I + J) = \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J).$$

En Singular:

```
> ring r=0,(t,x,y,z),lp;

> ideal I1 = x;

> ideal J1 = x^2, y, z;

> I1+J1;
```

Ejercicio: para $I = \langle x^2 - y - 1 \rangle$ y $J = \langle x + y - 1 \rangle$, describir $\mathbf{V}(I)$ y $\mathbf{V}(J)$. Calcular $\mathbf{V}(I + J)$.

Producto de ideales

- Dados $I, J \subset \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$, se define el producto

$$IJ = \langle fg : f \in I, g \in J \rangle.$$

- En este caso, el conjunto $\{fg : f \in I, g \in J\}$ no es un ideal. Ejercicio: encontrar un contraejemplo.
- Si $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ y $J = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$,

$$IJ = \langle f_i g_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t \rangle$$

  (no requiere calcular bases de Groebner)
- $\mathbf{V}(IJ) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$.

Intersección de ideales

- Dados $I, J \subset \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ ideales, $I \cap J$ es un ideal.
- $\mathbf{V}(I \cap J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$.
- Para calcular $I \cap J$, construimos

$$L = T \times I + (1 - T) \times J \subset \Bbbk[X_1, \dots, X_n, T],$$

luego $I \cap J = L \cap \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$.
¿Cómo calculamos la última intersección?

En Singular:

```
> ring r=0,(t,x,y,z),lp;
> ideal I1 = x;
> ideal J1 = x^2, y, z;
> I1*J1;

> ideal I2 = t*I1+(1-t)*J1;
> groebner(I2);
```

A partir del resultado obtenido, ¿cuáles son los generadores de $I_1 \cap J_1$?

Verificamos el resultado obtenido usando el comando de Singular:

```
> intersect(I1,J1);
```

Ideal de una variedad

- Recordemos,
  $\mathbf{V}(I) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Bbbk^n : f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ \forall f \in I\}$, la variedad del ideal I.
- Recíprocamente, para un conjunto $S \subset \Bbbk^n$, definimos

$$\mathbf{I}(S) = \{f \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_n] : f(x) = 0 \ \forall x \in S\}$$

- Si $f^n \in \mathbf{I}(S) \Rightarrow f \in \mathbf{I}(S)$.

Radical de un ideal

- Dado un ideal I, definimos

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathbb{k}[X_1, \ldots, X_n] : f^m \in I \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}$$

- Decimos que I es radical si $I = \sqrt{I}$.
- $\mathbf{I}(S)$ es un ideal radical para cualquier conjunto $S \subset \mathbb{k}^n$.
- $\mathbf{V}(\sqrt{I}) = \mathbf{V}(I)$.

Teorema (Hillbert Nullstellensatz)

Para cualquier ideal $I \subset \mathbb{k}[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$$

En Singular:

Para $I = \langle -xz^3 - yz^3 - 3z^4 + 3z^3 - z^2, xz^2 - xz + y^2, x + y + z^2 \rangle$, queremos determinar $\mathbf{V}(I)$.

```
> ring R=0,(x,y,z),lp;

> ideal I = -xz3-yz3-3z4+3z3-z2, xz2-xz+y2, x+y+z2;

> groebner(I);

> ideal J = radical(I);

> groebner(J);
```

A partir de los resultados obtenidos, determinar $\mathbf{V}(I)$.

Ideales 0-dimensionales

Un ideal I es 0-dimensional si $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(I)$ es un conjunto finito de puntos.

Proposición

I es 0-dimensional si y solo si $I \cap \Bbbk[X_i] = \langle g_i(X_i) \rangle$, $g_i \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Algoritmo para calcular el radical de un ideal 0-dimensional

1. $I \subset \Bbbk[X_1, \dots, X_n]$ ideal
2. $f_i(X_i) \in I \cap \Bbbk[X_i]$, $f_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$
3. $g_i = \sqrt{f_i}$, la parte libre de cuadrados de f_i
4. $\sqrt{I} = \langle I, g_1, \dots, g_n \rangle$

Procedimientos en Singular

```
proc sumaHastaN(int n)
{
  int i;
  int s = 0;
  for(i = 1; i<= n; i++)
  {
    s = s + i;
  }
  return(s);
}
```

Funciones auxiliares: polinomio libre de cuadrados

```
proc libreCuadrados(poly f, int i)
{
  poly g = f / gcd(f, diff(f,var(i));
  return(g);
}
```

Funciones auxiliares: producto de todas las variables menos una

```
proc todasMenosUna(int ind)
{
  int i;
  poly f = 1;
  for(i = 1; i<= nvars(basering); i++)
  {
    if(ind <> i)
    {
      f = f * var(i);
    }
  }
  return(f);
}
```

Radical de un ideal 0-dimensional

Algoritmo para calcular el radical de un ideal 0-dimensional

1. $I \subset \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ ideal 0-dimensional
2. $f_i(X_i) \in I \cap \Bbbk[X_i]$, $f_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$
3. $g_i = \sqrt{f_i}$, la parte libre de cuadrados de f_i
4. $\sqrt{I} = \langle I, g_1, \ldots, g_n \rangle$