Introducción a modelos matemáticos en finanzas cuantitativas

Dra. Patricia Kisbye
Universidad Nacional de Córdoba

UMA - 2017

Índice

Introducción

Las finanzas cuantitativas constituyen, desde hace varias décadas, un área particular de estudio dentro de la matemática. Esta nueva disciplina surge de la necesidad de encontrar modelos matemáticos que permitan describir el comportamiento aleatorio de activos financieros y, en particular, valorar los llamados productos *derivados*.

El objetivo de este curso es presentar los conceptos matemáticos fundamentales que se aplican a la teoría de arbitraje para la valoración de derivados financieros. Un modelo simple pero con amplias propiedades es el llamado *modelo binomial para valoración de derivados*. En esta teoría se simula la dinámica de precios de un activo a través de un proceso estocástico discreto, y se valora la prima de un derivado utilizando propiedades de martingala en una medida de probabilidad particular.

En este curso se mostrará cómo valorar opciones call y put europeas utilizando árboles binomiales, y sus adaptaciones para valoración de opciones americanas y exóticas.

Una ventaja de este modelo es su similitud con el modelo continuo para valoración de derivados utilizado por Black y Scholes para el cálculo de la prima de una opción call, y que mereció un premio Nobel de Economía en 1997. Se dará una idea intuitiva del paso desde el modelo discreto con árboles binomiales al modelo continuo con ecuaciones diferenciales estocásticas, sin entrar en los detalles de la complejidad matemática de este último.

A lo largo del curso se introducirá la terminología financiera que será utilizada, tales como activos, derivados, arbitraje, payoff, y su correspondencia con conceptos matemáticos presentes en el modelo: procesos estocásticos, variables aleatorias, cambios de medida, martingalas, entre otros.

1. Conceptos financieros

Existen distintas posibilidades de invertir dinero. Una de ellas es depositando el dinero a un interés cierto, como lo es en una cuenta bancaria. Otro tipo de inversión es a través de la adquisición de activos financieros, como por ejemplo acciones, commodities, monedas, entre otros. Estos activos son más riesgosos, ya que el rendimiento financiero que otorgan depende de factores que no tienen un comportamiento predecible, tales como económicos, políticos, estacionales, entre otros. La ventaja es que, en general, permiten aspirar a un mayor interés que el que ofrecen los bancos.

1.1. La cuenta bancaria

Si depositamos dinero en una cuenta bancaria, al cabo de un cierto tiempo este capital se incrementa en un determinado monto, llamado *interés*. Así, si fijamos una unidad de tiempo, por ejemplo el año, y denominamos $B(t)$ al capital disponible en el tiempo t, entonces $B(t+1)$ es el capital disponible un año después de t. El interés producido en ese período es

$$B(t+1) - B(t)$$

y la *tasa de interés anual* está dada por

$$i = \frac{B(t+1) - B(t)}{B(t)}.$$

De este modo, resulta que $B(t+1) = B(t) \cdot (1+i)$. Si en lugar de tomar como unidad de tiempo el año consideramos un período de 30 días, diremos que i es la tasa de interés a 30 días, y en general diremos que es la tasa de interés periódica.

En nuestro modelo, supondremos que al cabo de n períodos, la cuenta bancaria se ha incrementado con un régimen de capitalización compuesta. Esto es, el monto del capital en $t+2$ estará dado por

$$B(t+2) = B(t+1) \cdot (1+i) = B(t) \cdot (1+i)^2,$$

en $t+3$ será

$$B(t+3) = B(t+2) \cdot (1+i) = B(t) \cdot (1+i)^3,$$

y en general, en el tiempo $t+n$ se cumplirá que

$$B(t+n) = B(t) \cdot (1+i)^n. \tag{1.1}$$

A la tasa i la llamaremos **tasa libre de riesgo**.

1.2. Acciones y opciones

En el mercado financiero se cotiza el valor de distintos productos financieros. Entre ellos están las acciones, las monedas, los commodities, los bonos. Nos referiremos particularmente a las acciones.

Una **acción** consiste en la posesión de una pequeña parte de una empresa. Cuando una compañía determinada desea recaudar capital una de las posibilidades que tiene para hacerlo es emitiendo acciones. De esta manera la empresa consigue capital sin tener que verse comprometida a devolver o amortizar esos fondos a quien provee el capital, y por lo tanto sin adquirir una deuda. Al comprar las acciones, quienes invierten capital en ellas se convierten en nuevos propietarios de una parte de la compañía. En nuestro modelo asumiremos acciones sin pago de dividendos.

Un **derivado financiero** consiste en un contrato entre dos partes para comprar o vender un determinado activo subyacente, o simplemente **subyacente**. Las características y condiciones de estos contratos dan lugar a diferentes tipos de derivados, tales como contratos forward, futuros y opciones.

En este curso nos referiremos particularmente a las opciones.

Una **opción** es un contrato que da derecho a una de sus partes a comprar (o vender) el subyacente a un precio determinado en un tiempo futuro.

El precio que se determina en el contrato se denomina **strike** o **precio de ejercicio**. El vencimiento del contrato es la **madurez** o **fecha de expiración** de la opción. El **payoff** de la opción es lo que paga el contrato al momento de su ejercicio.

Las opciones que dan derecho a compra se denominan **calls** y las que dan derecho a venta se denominan **puts**.

Dado que en una opción una de las partes adquiere un derecho, la otra parte tiene entonces una obligación. Es decir, si una parte tiene derecho a comprar el subyacente a un determinado precio, su contraparte tendrá la obligación de venderla a ese precio. Esta situación crea una desigualdad financiera, dado que quien tiene el derecho nunca estaría en desventaja mientras que su contraparte nunca logra un beneficio. Por lo tanto estos contratos no tienen costo cero: quien adquiere el derecho debe pagar una **prima**. La determinación de esta prima es un objeto de estudio en finanzas cuantitativas, y es el tema central de este curso.

Si un inversor compra una opción se dice que está en una posición **long**, y si la vende está en una posición **short**.

Según las condiciones del contrato existe una gran variedad de opciones. Las opciones que se negocian en mercados formales se suelen denominar *opciones vainilla*. Dentro de las opciones vainilla existen dos tipos:

- Opciones europeas: son aquellas cuyo ejercicio ocurre sólo en la fecha de madurez.
- Opciones americanas: son aquellas que pueden ser ejercidas en cualquier momento previo a la madurez.

El payoff de una opción europea depende del valor del subyacente en el momento que se ejerce la opción. Si se trata de una opción call, con strike K y madurez T, entonces la opción será ejercida si el valor del subyacente $S(T)$ es mayor que K; y no se ejercerá en caso contrario.

Payoff de una call europea

$$\text{máx}(S(T) - K, 0) = (S(T) - K, 0)^+. \tag{1.2}$$

En el caso de la put, la opción se ejercerá si el strike K es mayor que el precio del subyacente.

Payoff de una put europea

$$\text{máx}(K - S(T), 0) = (K - S(T), 0)^+. \tag{1.3}$$

Existe una variedad mucho mayor de opciones que se comercializan fuera del mercado formal, y que se denominan **opciones exóticas**. Algunas de ellas y que analizaremos en este curso son opciones cuyo payoff no depende del valor del subyacente a la madurez, sino de la trayectoria de precios que ha tenido el subyacente. Algunas de ellas son:

- Opciones look-back: son aquellas cuyo payoff depende del valor máximo, o del valor mínimo, que haya alcanzado el subyacente desde el inicio del contrato hasta su madurez.
- Opciones asiáticas: son aquellas cuyo payoff depende del promedio de valores que ha tomado el subyacente durante la vigencia del contrato, o de una parte de ese tiempo.
- Opciones barrera: son aquellas cuyo payoff depende de que el subyacente haya cruzado una determinada barrera a lo largo de la vigencia del contrato.

Otras opciones exóticas son las binarias, bermudas, choice, shout, basket, exchange, y muchas otras.

1.3. Portfolios y el principio de no arbitraje

Un **portfolio** o cartera es un conjunto de inversiones que posee un individuo o empresa. Por ejemplo, un portfolio puede estar constituido por un préstamo en el banco y una tenencia de acciones; otro portfolio puede estar formado por una posición short en una opción, cierta cantidad de acciones y dinero depositada en el banco.

Una de las hipótesis que asumiremos en nuestro modelo es la ausencia de oportunidades de **arbitraje**. Esto significa que no es posible constituir un portfolio a costo cero, y que se tenga la plena seguridad que el día de mañana no otorgará pérdidas. Por ejemplo, si un inversor vende una acción y deposita ese dinero en el banco, está constituyendo un portfolio a costo $\$0$. Si este inversor tiene la plena seguridad que el día de mañana puede extraer ese dinero del banco con su interés y le sea suficiente para recomprar la acción sin tener pérdidas, entonces ha tenido una oportunidad de arbitraje.

En un modelo con **hipótesis de no arbitraje**, si un portfolio tiene valor inicial cero, entonces para cualquier tiempo futuro tiene una probabilidad no nula de tener un valor positivo y también una probabilidad no nula de tener un valor negativo.

2. Conceptos matemáticos

2.1. Introducción

El modelo binomial para valoración de activos es un modelo probabilístico en el cual se representa a la evolución del precio de un activo a través de un **proceso estocástico discreto** Presentamos entonces una breve introducción a procesos estocásticos.

2.2. Procesos estocásticos

Definición 2.1. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$ y un conjunto de números I, $I \subset \mathbb{R}$, un proceso estocástico X en Ω es una función

$$X : \Omega \times I \mapsto \mathbb{R}.$$

Así, para cada $t \in I$, $X(\cdot, t)$ es una variable aleatoria, y para cada $\omega \in \Omega$, $X(\omega, \cdot)$ es una función.

Si I es un subconjunto de los números enteros, se dice que es un proceso estocástico *discreto*, y de lo contrario es un proceso estocástico *continuo*.

Un caso particular de proceso estocástico discreto es el siguiente, y es análogo al que utilizaremos para modelar precios de activos.

Ejemplo 2.1. Supongamos que una moneda se arroja tres veces, y denotemos con C y X el resultado de **cara** y **cruz**, respectivamente. Consideramos Ω el conjunto de todos los resultados posibles:

$$\Omega = \{CCC,\ CCX,\ CXC,\ CXX,\ XCC,\ XCX,\ XXC,\ XXX\}.$$

Ahora consideramos un juego en el que comenzamos con un número positivo, digamos $S_0 = 12$, y en cada tiempo $t = 1, 2, 3$ se arroja la moneda y si sale C se multiplica al número por 2 y si sale cruz se divide por 2. Llamamos S_1, S_2, S_3 a los sucesivos resultados.

En este caso, el proceso estocástico está dado por una función S que depende de las tiradas de moneda y de cada tiempo t. Así, si $\omega = CXX$, entonces $S_1 = 24$, $S_2 = 12$ y $S_3 = 6$. Es decir, obtenemos una función de $\{1, 2, 3\} \mapsto \mathbb{R}$. Por otro lado, si fijamos $t = 2$, entonces S_2 será una variable aleatoria que depende de las tiradas de moneda:

$$S_2(\omega) = \begin{cases} 48 & \text{si } \omega \in \{CCC,\ CCX\} \\ 12 & \text{si } \omega \in \{CXC,\ CXX,\ XCC,\ XCX\} \\ 3 & \text{si } \omega \in \{XXC,\ XXX\} \end{cases}.$$

Notemos que si $\tilde{p}$ es la probabilidad de que la moneda salga cara y las tiradas son independientes, entonces S_2 tiene distribución binomial con parámetros $(2, \tilde{p})$. A su vez, S_1 es Bernoulli y $S_3 \sim Bin(3, \tilde{p})$.

2.3. El modelo binomial

El modelo binomial para valoración de activos supone un escenario similar al del Ejemplo 2.1. El activo considerado es una acción, cuyo valor inicial en $t = 0$ es conocido e igual a S_0. El precio S de este activo sigue un proceso estocástico, donde el espacio muestral está dado por los resultados de n tiradas independientes de una moneda, con probabilidad $\tilde{p}$ que salga cara y $1 - \tilde{p}$ que salga cruz.

$$\Omega = \{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n \mid \omega_i = C \text{ o } \omega_i = X\}.$$

Para cada $t = 1, 2, \ldots, n$, se cumple que el precio del activo se multiplica por un factor u o d según si la t-ésima moneda resulta cara o cruz:

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1} \cdot u & \text{si } \omega_t = C \\ S_{t-1} \cdot d & \text{si } \omega_t = X. \end{cases}$$

Supondremos además que $u > d > 0$, y $0 < \tilde{p} < 1$. Esto es, el precio del activo se mantiene positivo y en cada paso hay una probabilidad positiva que tome cualquiera de los dos valores siguientes. Notemos entonces que S_t es una variable aleatoria binomial que toma cada uno de los valores

$$S_0 \cdot u^j\, d^{t-j}, \quad 0 \leq j \leq t,$$

con probabilidad

$$P\left(S_t = S_0 \cdot u^j\, d^{t-j}\right) = \binom{t}{j} \tilde{p}^j (1 - \tilde{p})^{t-j}, \quad 0 \leq j \leq t.$$

En particular, el valor esperado de la variable S_t es igual a:

$$\begin{aligned} E[S_t] &= \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} \tilde{p}^j (1-\tilde{p})^{t-j} \cdot (S_0 \cdot u^j\, d^{t-j}) \\ &= S_0 \cdot \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j} (\tilde{p} \cdot u)^j ((1-\tilde{p}) \cdot d)^{t-j} \\ &= S_0 \cdot (\tilde{p} \cdot u + (1-\tilde{p}) \cdot d)^t. \end{aligned}$$

Más adelante retomaremos este resultado particular:

$$E[S_t] = S_0 \cdot (\tilde{p} \cdot u + (1-\tilde{p}) \cdot d)^t. \tag{2.1}$$

Para cada $\omega \in \Omega$, la sucesión de precios que toma el activo se denomina **trayectoria de precios**. La Figura 1 ilustra tres trayectorias para un activo, donde $n = 5$, $S_0 = 12$ y $u = \frac{1}{d} = 2$.

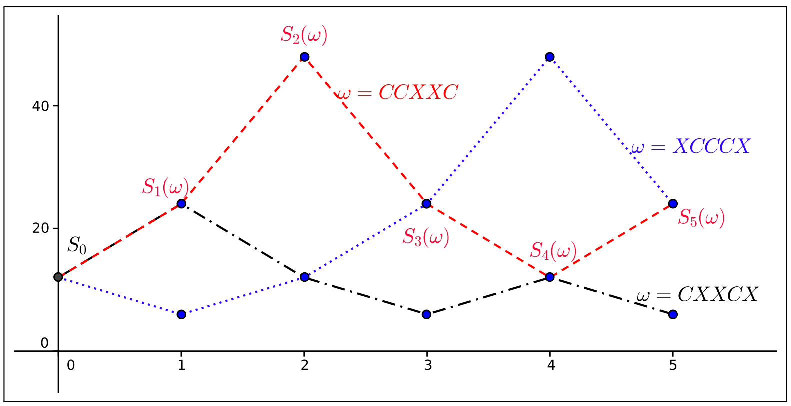

Figura 1: Trayectorias de precios de un activo

El modelo asume además una tasa de interés constante en cada período, que denotaremos i, y que representa a la tasa de interés periódica que ofrecen los bancos para depósitos y préstamos. Así, si se depositan \$12 en el banco en $t = 0$, entonces en $t = n$ habrá $\$12 \cdot (1+i)^n$ disponible.

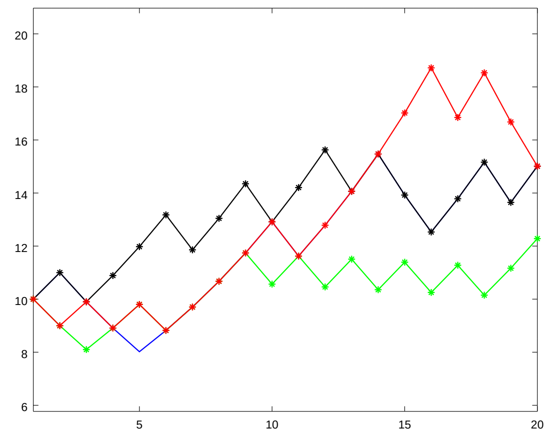

Figura 2: $n = 20$, $u = 1.1$, $d = 0.9$, $S_0 = 10$.

El modelo binomial para valoración de activos se conforma con:

- Una acción, que sigue un proceso estocástico, con S_0 un valor positivo y

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1} \cdot u & \text{si } \omega_t = C \\ S_{t-1} \cdot d & \text{si } \omega_t = X. \end{cases}$$

- Una cuenta bancaria, que sigue un proceso determinístico:

$$B(t+1) = B(t) \cdot (1+i), \qquad B(0) = 1.$$

En el modelo binomial se asume que no es posible una estrategia de arbitraje. Esta hipótesis se traduce en la siguiente **condición** sobre el modelo:

$$d < 1 + i < u. \tag{2.2}$$

La razón es simple. Si $1 + i \leq d$, significa que la tasa ofrecida por el banco es inferior al rendimiento que da el activo. Por lo tanto, si se pide dinero prestado al banco para comprar el activo (costo inicial nulo), al cabo de un período hay una probabilidad positiva de obtener ganancia (pues $\tilde{p} > 0$) y una probabilidad nula de tener pérdida. Por otra parte, si $1 + i \geq u$, entonces siempre es conveniente invertir en el banco: si se vende a acción y se deposita el dinero en el banco, en $t = 1$ es posible recuperar la acción y hay una probabilidad positiva de obtener ganancia, y nula de tener pérdida (pues $1 - \tilde{p} > 0$).

Formalmente, si consideramos el proceso

$$X_t = S_t - S_0 \cdot B(t)$$

comienza en $X_0 = 0$, y en $t = 1$ vale

$$\begin{cases} S_0 \cdot (u - (1+i)) & \text{si } \omega_1 = C \\ S_0 \cdot (d - (1+i)) & \text{si } \omega_1 = X \end{cases}.$$

Luego, si $1 + i \leq d < u$ existiría un portfolio consituido por una acción y dinero en el banco con costo inicial 0, y tal que X_1 tiene probabilidad no nula de ser positivo y nula de ser negativo: *hay posibilidad de arbitraje.*

En la situación $d < u \leq 1 + i$, consideramos el portfolio $-X_t$ y llegamos a la misma conclusión.

2.4. Esperanza condicional

Consideremos las familias de subconjuntos de Ω:

$$\begin{aligned}
M_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \\
M_1 &= \{\{C\omega_2 \dots \omega_n\},\ \{X\omega_2 \dots \omega_n\}, \emptyset, \Omega\} \\
M_2 &= \{\{CC\omega_3 \dots \omega_n\}, \{CX\omega_3 \dots \omega_n\},\ \{XC\omega_3 \dots \omega_n\}, \{XX\omega_2 \dots \omega_n\} \\
&\quad \text{y todos los complementos y uniones}\} \\
M_3 &= \{\{CCC\omega_4 \dots \omega_n\}\}, \{CCX\omega_4 \dots \omega_n\}, \{CXC\omega_4 \dots \omega_n\}, \{CXX\omega_4 \dots \omega_n\}, \\
&\quad \{XCC\omega_4 \dots \omega_n\}, \{XCX\omega_4 \dots \omega_n\}, \{XXC\omega_4 \dots \omega_n\}, \{XXX\omega_4 \dots \omega_n\} \\
&\quad \text{y todos los complementos y uniones}\} \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

donde la notación $\omega_i \dots \omega_n$ indica todos las secuencias de n tiradas de monedas con esa terminación. Por ejemplo, si $n = 4$, entonces

$$\{CX\omega_3\omega_4\} := \{CXCC,\ CXCX,\ CXXC,\ CXXX\}.$$

Notemos que M_k agrupa en un mismo subconjunto aquellos resultados que coinciden en las primeras k tiradas. En particular se cumple que

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots M_n.$$

Decimos que $\mathcal{M} = \{M_k \mid k = 0, 1, 2, \dots, n\}$ es una **filtración** en el espacio Ω. Para este caso y para procesos estocásticos en general, se interpreta a M_k como la información disponible hasta el tiempo $t = k$.

Si $\{X_k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$ es un proceso estocástico discreto sobre Ω tal que para cada k, X_k depende sólo de las primeras k tiradas de moneda, se dice que es un proceso estocástico

adaptado a la filtración $\mathcal{M}$. En particular, en el modelo binomial el proceso de precios de la acción es un proceso adaptado.

Si $\{X_k\}$ es un proceso adaptado, entonces el valor esperado de X_{k+1} conocida la información hasta $t = k$ se define como:

$$E[X_{k+1} \mid M_k](\omega_1 \dots \omega_k) := \tilde{p} \cdot X_{k+1}(\omega_1 \dots \omega_k C) + \tilde{q} \cdot X_{k+1}(\omega_1 \dots \omega_k X). \tag{2.3}$$

La expresión (2.3) se denomina **esperanza condicional** de X_{k+1} dada la información hasta $t = k$. En general, si es claro del contexto, lo denotaremos

$$E[X_{k+1} \mid M_k].$$

Si $0 \leq k < n$, entonces la esperanza condicional de X_n condicional a M_k se define promediando sobre todas las tiradas que terminan en todos los posibles $\omega_{k+1} \dots \omega_n$:

$$E[X_n \mid M_k](\omega_1 \dots \omega_k) = \sum_{\omega_{k+1} \dots \omega_n} P(\omega_1 \dots \omega_k \omega_{k+1} \dots \omega_n) \cdot X_n(\omega_1 \dots \omega_k \omega_{k+1} \dots \omega_n). \tag{2.4}$$

Por ejemplo, para el proceso estocástico S_n, tenemos que

$$\begin{aligned} E[S_{n+1} \mid M_n] &= \tilde{p} \cdot S_n u + \tilde{q} \cdot S_n d = S_n \cdot (\tilde{p}\, u + \tilde{q}\, d) \\ E[S_3 \mid M_1](\omega_1) &= \tilde{p}^2\, S_3(\omega_1 CC) + \tilde{p}\tilde{q}\, S_3(\omega_1 CX) + \tilde{q}\tilde{p}\, S_3(\omega_1 XC) + \tilde{q}^2\, S_3(\omega_1 XX) \\ &= \left(\tilde{p}^2\, u^2 + 2\tilde{p}\tilde{q}\, ud + \tilde{q}^2\, d^2\right) S_1(\omega_1) \end{aligned}$$

La esperanza condicional es un concepto más general que se define para cualquier variable aleatoria sobre un espacio Ω, y en la que M_k es cualquier *subálgebra* de conjuntos de Ω. Nos restringiremos aquí al caso de la filtración que será lo necesario para nuestro curso. En el caso del modelo binomial, si consideramos una variable aleatoria X que depende de las primeras n tiradas de moneda, entonces la esperanza condicional de X dada la información hasta $t = k$ se define de manera análoga a (2.4) reemplazando X_n por X.

Es importante notar que la esperanza condicional $E[X \mid M_k]$ es una variable aleatoria (y no un número) que depende sólo de las primeras k tiradas de moneda. En particular, se cumplen las siguientes propiedades:

a) La esperanza condicional de X a la información en tiempo 0 es el valor esperado de la variable X.
$$E[X \mid M_0] = E[X]$$

b) Aditividad: Si X e Y son variables aleatorias que dependen de las primeras n tiradas, entonces
$$E[X + Y \mid M_k] = E[X \mid M_k] + E[Y \mid M_k].$$

c) Sobre información conocida: Si una variable aleatoria Y depende sólo de las primera k tiradas, y $k < n$, entonces

$$E[YX \mid M_k] = Y\, E[X_n \mid M_k].$$

d) Condicionamiento iterado: Para $j < k < n$,

$$E[E[X \mid M_k] \mid M_j] = E[X \mid M_j],$$

2.5. Martingalas

Definición 2.2. Un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathcal{M}$ se dice una **martingala** si se cumple que para todo $k \geq 0$,

$$E[X_{k+1} \mid M_k] = X_k.$$

Corolario 2.1. Si $\{X_k\}$ es una martingala, entonces para todo $k \geq 0$ se cumple que el valor esperado de X_k se mantiene constante e igual a X_0:

$$E[X_k] = X_0.$$

3. Modelo binomial para valoración de activos

3.1. Valoración de opciones europeas

Hasta ahora hemos presentado al modelo binomial como una base para describir el comportamiento de un activo. Introducimos ahora un derivado, propiamente una opción call sobre una acción, y el objetivo principal será valorar la prima de esta opción. El método a utilizar se basa fuertemente en la hipótesis de no arbitraje, y se enmarca en la llamada *Teoría del Arbitraje* o en inglés *Arbitrage Pricing Theory (APT)*.

3.1.1. Modelo binomial de un paso

Comenzaremos con un ejemplo de un modelo binomial de un paso, es decir, $n = 1$. Si bien es un caso trivial resulta útil para comprender la filosofía de este método de valoración.

Ejemplo 3.1. Una acción cuesta actualmente \$20. En tres meses, el precio de la acción será \$18 o \$22. La tasa de interés trimestral es del $2.5\,\%$. ¿Cuál es la prima que debe tener una opción de compra call a tres meses sobre una acción de estas características, si el strike K es de \$21?

Ilustramos esta situación con un grafo llamado ***árbol binomial***, denotando S_0 al precio inicial de la acción, y $S_u = S_0 \cdot u$ y $S_d = S_0 \cdot d$ al precio de la acción un trimestre más tarde. Notemos que $u = 1.1$ y $d = 0.9$.

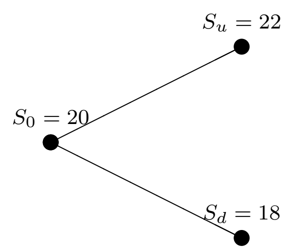

Figura 3: Evolución de la acción

Una opción sobre esta acción tendrá un determinado payoff en la madurez, y una prima V_0 al inicio del contrato. El payoff es el valor del contrato en su madurez. La prima es el valor del contrato en su inicio.

Para este ejemplo, denotamos V_0 al valor de la prima, y V_u y V_d están dados por el payoff de la opción según el subyacente valga S_u o S_d (ver la fórmula (1.2)):

$$V_u = \max(22 - 21, 0) = 1 \qquad\qquad V_d = \max(18 - 21, 0) = 0$$

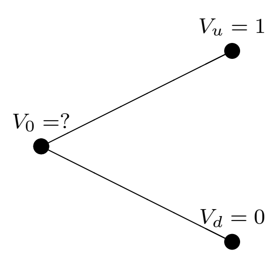

Figura 4: Evolución del derivado

Un método para determinar la prima de este derivado es construir un **portfolio replicante** de la opción. Esto es, un portfolio que consista en dinero y unidades del subyacente (la acción), y que siga la misma evolución que la opción. Si esto es posible, entonces por la hipótesis de no arbitraje la opción y el portfolio deben tener el mismo valor en $t = 0$.

Para este ejemplo, la situación es la siguiente. Consideramos un portfolio X de valor X_0 (desconocido), y que está formado por Δ acciones y $X_0 - \Delta \cdot 20$ pesos en el banco:

$$X_0 = \underbrace{\Delta \cdot S_0}_{\text{acciones}} + \underbrace{(X_0 - \Delta \cdot S_0) \cdot B(0)}_{\text{dinero}}.$$

Notemos que X_0 se construye con los activos del modelo: acciones (S_0) y dinero ($B(0) = 1$).

Es claro que tanto Δ como X_0 son desconocidos. También acordamos que, si $X_0 - \Delta \cdot S_0$ es positivo se trata de un depósito bancario, y si $X_0 - \Delta \cdot S_0$ es negativo se trata de un préstamo bancario. Asimismo, si $\Delta > 0$ significa que se compran acciones, y si $\Delta < 0$ se deben acciones.

Para comprender mejor la situación, imaginemos que un inversor que vende la opción invierte ese dinero en acciones y dinero en el banco. Su objetivo es que este nuevo portfolio tenga un valor igual al payoff de la opción en $t = 1$, para que pueda afrontar el pago a su contraparte.

A los tres meses este portfolio X tendrá un valor distinto según sea el precio del activo subyacente.

- Si en $t = 1$ el subyacente vale $\$22$ ($S_u = 22$), entonces el portfolio tendrá el valor

$$\begin{aligned} X_u &= \Delta \cdot S_u + (X_0 - \Delta \cdot S_0) \cdot (1 + i) \\ &= \Delta \cdot 22 + (X_0 - \Delta \cdot 20) \cdot (1.025). \end{aligned} \tag{3.1}$$

- Si en $t = 1$ el subyacente vale $\$18$ ($S_d = 18$), entonces el portfolio tendrá el valor

$$\begin{aligned} X_d &= \Delta \cdot S_d + (X_0 - \Delta \cdot S_0) \cdot (1 + i) \\ &= \Delta \cdot 18 + (X_0 - \Delta \cdot 20) \cdot (1.025). \end{aligned} \tag{3.2}$$

En un diagrama de árbol se representa como en la Figura 5.

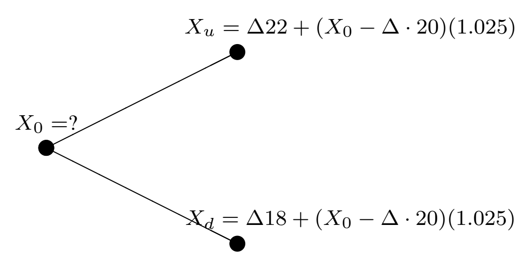

Figura 5: Evolución del portfolio replicante

Que este portfolio sea replicante de la opción significa que debe cumplirse que en $t = 1$ su valor sea el mismo que el payoff de la opción. Es decir:

$$\begin{cases} \Delta 22 + (X_0 - \Delta \cdot 20)(1.025) = 1 \\ \Delta 18 + (X_0 - \Delta \cdot 20)(1.025) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas Δ y X_0, que tiene solución

$$\Delta = 0.25, \qquad X_0 = 0.6097.$$

Sostenemos que este valor de X_0 debe ser el valor de la prima de la opción. Es decir,

$$\boxed{V_0 := X_0 = 0.6097.}$$

De lo contrario, si $V_0 > 0.6097$, podríamos vender la opción, invertir en el portfolio replicante y el dinero sobrante depositarlo en el banco. Esta estrategia tiene costo \$0. En $t = 1$, el portfolio vale exactamente lo mismo que la opción, por lo que con probabilidad 1 tendremos una ganancia positiva que proviene del dinero sobrante. A su vez, si $V_0 < 0.6097$, la estrategia consistirá en vender el portfolio y comprar la opción, y nuevamente existirá una posibilidad de arbitraje.

Finalmente, notemos que en ningún caso hemos tenido en cuenta la probabilidad *real* de que el precio del subyacente modifique su precio. Es decir, no hemos considerado la probabilidad de que $S_1 = 22$ ni que $S_1 = 18$. Esto es verdaderamente importante en este método, ya que en la práctica es imposible determinar la probabilidad real de que el precio de una acción aumente o disminuya.

3.1.2. Probabilidad neutral al riesgo

Notemos que los valores de Δ y X_0 en (3.3) y (3.1) se obtienen resolviendo las ecuaciones:

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}, \tag{3.4}$$

$$X_0 = (V_u - \Delta\, S_u) \cdot \frac{1}{1+i} + \Delta \cdot S_0, \tag{3.5}$$

Reemplazando Δ en (3.5) por su expresión en (3.4), y operando algebraicamente obtenemos que

$$X_0 = \frac{1}{1+i}\left(\underbrace{\frac{1+i-d}{u-d}}_{p} \cdot V_u + \underbrace{\frac{u-(1+i)}{u-d}}_{q} \cdot V_d\right) = \frac{1}{1+i}\,(p \cdot V_u + q \cdot V_d)\,.$$

Debido a la condición de no arbitraje, esto es, $d < 1 + i < u$, tenemos que p y q son positivos. Además, $p + q = 1$. Luego es posible considerar a p y q como una nueva medida de probabilidad en Ω. Esto es, en la nueva medida asignamos:

$$P(\omega_i = C) := \frac{1+i-d}{u-d}, \qquad P(\omega_i = X) := q = \frac{u-(1+i)}{u-d}. \tag{3.6}$$

En el Ejemplo 3.1, se tiene

$$p = \frac{1.025 - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.625, \qquad q = 0.375,$$

y la prima de la opción resulta:

$$V_0 = \frac{1}{1.025} \cdot (0.625 \cdot 1 + 0.375 \cdot 0) = 0.6097.$$

Esta nueva medida de probabilidad dada en (3.6) juega un rol importante en el modelo binomial. Notemos que para p y q como en (3.6) se cumple que

$$(p \cdot u + q \cdot d) = 1 + i.$$

Luego, de la fórmula (2.1) tenemos que, para un valor de k cualquiera, $0 \leq k < n$:

$$S_k \cdot (1 + i) = (p \cdot S_k u + q \cdot S_k d).$$

En particular bajo esta probabilidad, $S_k \cdot (1 + i)$ es el valor esperado de S_{t+1} **condicional** a la información en $t = k$. En términos de la filtración M_k:

$$E[S_{k+1} \mid M_k] = S_k \cdot (1 + i). \tag{3.7}$$

En la realidad, se espera que un activo dé un rendimiento mayor al de la tasa de interés libre de riesgo. Es decir, si se considerara el valor esperado $\tilde{E}[\,]$ con esta probabilidad, debería ocurrir que $\tilde{E}[S_{k+1}] \geq (1 + i)\,\tilde{E}[S_k]$. Esto es porque alguien que invierte en un activo con riesgo espera un beneficio extra por este riesgo. Ahora bien, bajo la medida de probabilidad (3.6) el inversor es *neutral* al riesgo. Por ello a esta medida se la denomina probabilidad neutral al riesgo.

Probabilidad neutral al riesgo

En el modelo binomial y bajo la hipótesis de no arbitraje, la medida de probabilidad

$$p = \frac{1 + i - d}{u - d}, \qquad q = \frac{u - (1 + i)}{u - d},$$

se denomina **probabilidad neutral al riesgo**.

Otra característica de esta probabilidad es la de ser una **medida de martingala**. Si dividimos ambos miembros de (3.7) por $(1 + i)^{k+1}$ obtenemos:

$$E\left[\frac{S_{k+1}}{(1 + i)^{k+1}} \mid M_k\right] = \frac{S_k}{(1 + i)^k}, \tag{3.8}$$

es decir que el proceso

$$S_0, \quad \frac{S_1}{1+i}, \quad \frac{S_2}{(1+i)^2}, \dots \quad \frac{S_n}{(1+i)^n} \dots$$

es una martingala bajo la probabilidad neutral al riesgo.

Recordemos que el modelo binomial está constituido por dos *activos*, que representamos con dos procesos: S_k y $B(k) = (1+i)^k$, $0 \leq k \leq n$.

Consideremos ahora estos mismos procesos, pero divididos ambos por $B(k) = (1+i)^k$:

$$\frac{S_k}{(1+i)^k}, \qquad \frac{B(k)}{(1+i)^k} = 1.$$

Decimos que son procesos *descontados* o *deflatados* por el **numerario** $B(k)$. Como la cuenta bancaria descontada $B(k)/B(k)$ es constantemente igual a 1, entonces también resulta una martingala. Por lo tanto bajo la probabilidad neutral al riesgo ambos procesos descontados resultan ser martingalas. Por ello esta probabilidad también se suele llamar **medida de martingala.**

Por último, y retomando estas definiciones, tenemos que:

En el modelo binomial de un paso , la prima de una opción europea está dada por el valor esperado descontado de su payoff bajo la probabilidad neutral al riesgo:

$$V_0 = \frac{1}{1+i}\left(p \cdot V_u + q \cdot V_d\right).$$

En particular, la prima c de una opción call europea con madurez en $t = 1$ y strike K está dada por

$$c = \frac{1}{1+i}\, E[(S_1 - K)^+],$$

y la prima p de una opción put europea con igual strike y madurez es:

$$p = \frac{1}{1+i}\, E[(K - S_1)^+].$$

3.1.3. Modelo binomial multiperiódico

Extendemos ahora la situación de valoración de la opción al caso en que su madurez ocurre luego de n períodos. Así, debemos considerar los posibles valores del subyacente para los tiempos $t = 0, 1, 2, \dots, n$.

Al cabo de n períodos, el activo puede tomar $n+1$ valores diferentes, y para cada uno de ellos la opción tiene un determinado payoff. Este payoff resulta entonces también una variable aleatoria, cuya aleatoriedad depende de las n tiradas de moneda.

Esta prima se calcula de manera análoga que para el caso $n = 1$, pero en este caso el valor de Δ no se mantiene constante en el tiempo sino que se actualiza en cada paso. Nuevamente, la forma de determinar la prima de la opción es construyendo un portfolio replicante con acciones y dinero en la cuenta bancaria.

Presentamos un ejemplo ilustrativo para una opción call y simultáneamente el caso general de una opción europea que se ejerce en $t = 2$, no necesariamente una call.

Ejemplo 3.2. Consideremos un activo con valor inicial $S_0 = 20$, y que cada tres meses se incrementa en un 10 % o disminuye en un 10 %. Esto es: $u = 1.1$ y $d = 0.9$. La tasa de interés libre de riesgo en cada período trimestral es del 2.5 %.

Una opción call sobre este activo, con strike $K = 21$, tiene una madurez de 6 meses, es decir $n = 2$ períodos. El objetivo es determinar la prima de esta opción.

La Figura 6 representa la evolución del precio del activo.

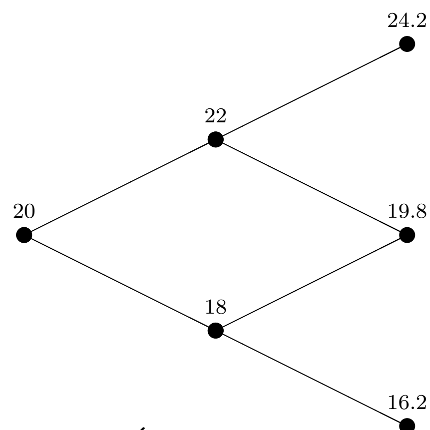

Figura 6: Árbol de la acción

Denotamos como antes al precio del subyacente en tiempo t con S_t. Además, como S_1 depende de la primera tirada, escribiremos S_u por $S_1(C)$ y S_d por $S_1(X)$. Para S_2 acordamos la notación $S_{uu} := S_2(CC)$, $S_{ud} := S_2(CX)$, $S_{du} := S_2(XC)$, y $S_2(XX) := S_{dd}$. La misma convención utilizaremos para cualquier otro proceso estocástico que dependa de las primeras tiradas de moneda.

Los valores posibles del payoff de la opción están dados por:

$$V_2 = \text{Payoff de la call} = \max\{S_2 - K, 0\} = \max\{S_2 - 21, 0\}.$$

y están representados en la Figura 7.

Aquí los valores en $t = 2$ están dados por el payoff de la opción:

$$\begin{aligned} V_{uu} &= \max\{24.2 - 21, 0\} = 3.2, \\ V_{ud} = V_{du} &= \max\{19.8 - 21, 0\} = 0, \\ V_{dd} &= \max\{16.2 - 21, 0\} = 0. \end{aligned}$$

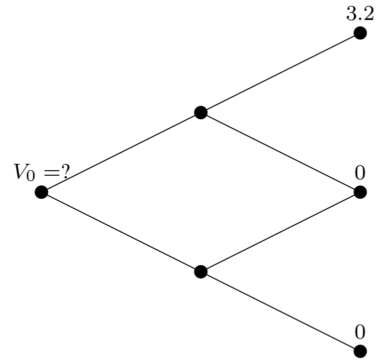

Figura 7: Payoff de la opción

Consideraremos un portfolio *replicante* X_0, X_1, X_2 que en $t = 0$ está compuesto por:

- una posición en Δ_0 acciones ($\Delta_0\, S_0$), y
- una cantidad de dinero en el banco ($x \cdot B(0)$), que podrá ser un depósito o un préstamo. Recordemos que $B(0) = 1$.

El valor inicial de este portfolio será entonces:

$$X_0 = \underbrace{\Delta_0 S_0}_{\text{acciones}} + \underbrace{(X_0 - \Delta_0 S_0) \cdot B(0)}_{\text{dinero}}.$$

El objetivo es definir la evolución de este portfolio para lograr que su valor en $t = 2$ (X_2) iguale al payoff de la opción. El valor de este portfolio en $t = 1$ dependerá de la tasa de interés libre de riesgo y de la evolución del precio de la acción. Lo que se pretende es "rebalancear" este portfolio en $t = 1$ pero sin modificar su valor para que, llegado el tiempo $t = 2$ su valor coincida exactamente con el payoff de la opción. Si esto es posible, por el principio de no arbitraje debe ser que su valor inicial coincide con la prima de la opción.

En el caso de nuestro ejemplo, tenemos

$$X_0 = \underbrace{\Delta_0 \cdot 20}_{\text{en acciones}} + \underbrace{(X_0 - \Delta_0\, 20)}_{\text{en el banco}}.$$

En $t = 1$, el valor del portfolio será:

$$X_1 = \Delta_0 \cdot S_1 + (X_0 - \Delta_0\, 20) \cdot (1 + i).$$

Notemos que S_1 depende de la primer tirada de moneda, y por lo tanto también X_1. Así, según la moneda salga cara o cruz tendremos que el valor de X_1 es:

$$X_u = \Delta_0 \cdot S_u + (X_0 - \Delta_0\, S_0) \cdot (1 + i) \tag{3.9}$$

$$X_d = \Delta_0 \cdot S_d + (X_0 - \Delta_0\, S_0) \cdot (1 + i). \tag{3.10}$$

En el Ejemplo 3.2:

$$X_u = \Delta_0 \cdot 22 + (X_0 - \Delta_0\, 20) \cdot (1.025).$$

$$X_d = \Delta_0 \cdot 18 + (X_0 - \Delta_0\, 20) \cdot (1.025).$$

En el momento $t = 1$, reajustamos o rebalanceamos el portfolio pero sin modificar su valor. En la práctica significa que o bien vendemos algunas acciones y ese dinero lo depositamos en el banco, o bien usamos parte del dinero en el banco para invertir en acciones. Algebraicamente, X_1 se reescribe de la forma:

$$X_1 = \underbrace{\Delta_1 S_1}_{\text{acciones}} + \underbrace{(X_1 - \Delta_1 S_1)}_{\text{dinero}}.$$

Es importante notar aquí que Δ_1 es una variable aleatoria que dependerá del valor de X_1, que a su vez depende de la tirada de moneda. Por lo tanto estamos rebalanceando dos posibles portfolios:

$$X_u = \Delta_u\, S_u + (X_u - \Delta_u\, S_u),$$

$$X_d = \Delta_d\, S_d + (X_d - \Delta_d\, S_d\,),$$

que en el Ejemplo 3.2 corresponde a redistribuir el capital de valor X_1 con una parte en acciones (que ahora valen \$22 o \$18) y el resto en la cuenta bancaria:

$$X_u = \Delta_u \cdot 22 + (X_u - \Delta_u \cdot 22),$$

$$X_d = \Delta_d \cdot 18 + (X_d - \Delta_d \cdot 18),$$

Finamente, en $t = 2$ es el tiempo de madurez de la opción, y el valor del portfolio será:

$$X_2 = \Delta_1\, S_2 + (X_1 - \Delta_1\, S_1)\,(1 + i).$$

Ahora X_2 depende de las dos primeras tiradas de moneda: CC, CX, XC y XX. Se habrá obtenido un portfolio replicante si es posible resolver las cuatro ecuaciones que resultan de:

$$\Delta_1\, S_2 + (X_1 - \Delta_1\, S_1)\,(1 + i) = \text{máx}(S_2 - K, 0),$$

considerando las cuatro posibilidades. Esto es, se trata de hallar la solución de:

$$\begin{cases} \Delta_u\, S_{uu} + (X_u - \Delta_u\, S_u) \cdot (1 + i) & = V_{uu} \\ \Delta_u\, S_{ud} + (X_u - \Delta_u\, S_u) \cdot (1 + i) & = V_{ud} \\ \Delta_d\, S_{du} + (X_d - \Delta_d\, S_d) \cdot (1 + i) & = V_{du} \\ \Delta_d\, S_{dd} + (X_d - \Delta_d\, S_d) \cdot (1 + i) & = V_{dd} \end{cases} \tag{3.11}$$

En el caso de nuestro ejemplo corresponde a resolver las ecuaciones:

$$\begin{cases} \Delta_u\, 24.2 + (X_u - \Delta_u\, 22) \cdot 1.025 & = 3.2 \\ \Delta_u\, 19.8 + (X_u - \Delta_u\, 22) \cdot 1.025 & = 0 \\ \Delta_d\, 19.8 + (X_d - \Delta_d\, 18) \cdot 1.025 & = 0 \\ \Delta_d\, 16.2 + (X_d - \Delta_d\, 18) \cdot 1.025 & = 0 \end{cases}$$

Notemos que tenemos (3.9), (3.10) y (3.11) determinan seis ecuaciones con seis incógnitas: X_0, Δ_0, Δ_u, Δ_d, X_u y X_d. El valor de Δ_u y Δ_d está dado por:

$$\Delta_u = \frac{V_{uu} - V_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}}, \qquad \Delta_d = \frac{V_{du} - V_{dd}}{V_{du} - V_{dd}}.$$

Observando la analogía para el caso $n = 1$, obtenemos que

$$X_u = \frac{1}{1+i}\, (p \cdot V_{uu} + q \cdot V_{ud}) \qquad X_d = \frac{1}{1+i}\, (p \cdot V_{du} + q \cdot V_{dd}),$$

para las mismas probabilidades de riesgo neutral:

$$p = \frac{1+i-d}{u-d}, \qquad q = 1 - p.$$

Con estos valores de X_u y X_d, resolvemos de manera análoga para Δ_0 y X_0:

$$\Delta_0 = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}, \qquad X_0 = \frac{1}{1+i}\, (p \cdot X_u + q \cdot X_d).$$

Basándonos en el principio de no arbitraje, este valor X_0 debe ser el valor de la prima de la opción. Para nuestro ejemplo, tendremos:

$$X_u = 1.95 \qquad X_d = 0 \qquad \Delta_u = 0.7272 \qquad \Delta_d = 0 \qquad \Delta_0 = 0.4878$$

y la prima de la opción dada por

$$\boxed{V_0 = X_0 = 1.1897.}$$

Notemos que el proceso X_t, $t = 0, 1, 2$, denota un portfolio que replica el valor de la opción en $t = 2$, y la forma de determinar este portfolio fue de manera recursiva pero en sentido contrario al tiempo. Esto es, a partir del payoff pudimos determinar X_1, y a partir de X_1 determinamos X_0. Por un argumento de no arbitraje, este valor debe coincidir con la prima de la opción. Los valores que se obtienen de esta forma recursiva se definen como el valor del derivado en el tiempo, y se denotan entonces como V_t, $t = 0, 1$. Esto es:

$$\begin{aligned} V_u := X_u &= \frac{1}{1+i} \cdot (p\, V_{uu} + q\, V_{ud}) \\ V_d := X_d &= \frac{1}{1+i} \cdot (p\, V_{du} + q\, V_{dd}) \\ V_0 : &= X_0 = \frac{1}{1+i} \cdot (p\, V_u + q\, V_d) \end{aligned}$$

Reemplazando V_u y V_d por sus expresiones, finalmente obtenemos que

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{(1+i)^2}\left(p^2\,V_{uu} + pq\,V_{ud} + qp\,V_{du} + q^2\,V_{dd}\right) \\ &= \frac{1}{(1+i)^2}E[(S_2-K)^+], \end{aligned}$$

donde el valor esperado se calcula bajo las probabilidades de riesgo neutral. **En resumen**, hemos determinado tres procesos estocásticos:

- El portfolio replicante: X_0, X_1, X_2.
- El proceso de *delta-cobertura*: Δ_0, Δ_1, que determinan la cobertura en acciones.
- El valor del derivado en el tiempo: V_0, V_1, V_2.

Es claro que V_i y X_i son iguales por definición. La diferencia es la forma de construcción de ambos procesos.

Notemos que siempre es posible definir el valor del derivado a través de las probabilidades de riesgo neutral, y se puede generalizar fácilmente este método para cualquier derivado de tipo europeo con madurez en $t = 2$:

$$V_0 = E\left[\frac{V_2}{(1+i)^2}\right].$$

Ahora bien, ¿es posible generalizar este procedimiento para N pasos? ¿Existe siempre un portfolio $\{X_t\}$ replicante? La respuesta es sí, y se siguen pasos análogos a los que hemos mostrado en el caso $n = 2$. Esta es una característica particular del modelo binomial.

Definición 3.1. Un mercado se dice **completo** si todo derivado es replicable. por un portfolio formado por el subyacente y dinero en la cuenta bancaria.

El método de valoración de un derivado que hemos visto para $n = 1$ y $n = 2$, como así también la construcción de un portfolio replicante, se extienden al caso general de un modelo binomial de n pasos. Es decir, el valor de un derivado se obtiene calculando recursivamente *hacia atrás*: $V_n, V_{n-1}, \ldots, V_1, V_0$, a partir de valores esperados descontados. Luego el portfolio replicante se construye a partir de un proceso de *delta-cobertura* en el subyacente y dinero en la cuenta bancaria.

El siguiente teorema y su demostración demuestran esta característica del modelo binomial multiperiódico.

Teorema 3.1. Sea V_n una variable aleatoria (payoff de un derivado) sobre

$$\Omega = \{\omega_1 \ldots \omega_n \mid \omega_i = C \text{ o } \omega_i = X,\ 1 \le i \le n\}.$$

Sean p y q las probabilidades de riesgo neutral (3.6), y para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ definimos las variables aleatorias V_k que dependen de las primeras k tiradas:

$$V_k(\omega_1 \cdots \omega_k) = \frac{1}{(1+i)}\left(p\, V_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k C) + q\, V_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k X)\right) = E[V_{k+1} \mid M_k].$$

Para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, sea $\{\Delta_k\}$ el proceso de *delta-cobertura* dado por:

$$\Delta_k(\omega_1 \ldots \omega_k) = \frac{V_{k+1}(\omega_1 \ldots \omega_k C) - V_{k+1}(\omega_1 \ldots \omega_k X)}{S_{k+1}(\omega_1 \ldots \omega_k C) - S_{k+1}(\omega_1 \ldots \omega_k X)}.$$

Entonces, si $X_0 = V_0$ y para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ se define

$$X_{k+1} = \Delta_k\, S_{k+1} + (X_k - \Delta_k\, S_k)(1+i),$$

entonces resulta $X_n = V_n$. Esto es, $\{X_k \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$ es un portfolio replicante.

Definición 3.2. Para $k = 1, 2, \ldots, n$ la variable aleatoria $V_n(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k)$ en el Teorema 3.1 se define como el *precio del derivado en tiempo k si las primeras k tiradas son $\omega_1 \ldots \omega_k$. El precio de un derivado en tiempo $t = 0$ se define como V_0.*

Demostración del Teorema 3.1. Debemos demostrar que $X_n = V_n$. Para esto probaremos por inducción que $X_k = V_k$, $0 \leq k \leq n$.

Para $k = 0$ es cierto por definición: $X_0 = V_0$. Supongamos que es válido para un cierto $k < n$. Queremos ver que $X_{k+1} = V_{k+1}$, y para esto debemos analizar si en el paso $k+1$ la moneda sale cara o sale cruz. Como ambos casos son análogos, demostramos sólo el caso en que las primeras $k+1$ tiradas son de la forma $\omega_1 \ldots \omega_k C$. Para simplificar la notación, omitiremos escribir $\omega_1 \ldots \omega_k$. Tenemos que:

$$X_{k+1}(C) = \Delta_k \cdot S_k \cdot u + (X_k - \Delta_k \cdot S_k) \cdot (1+i).$$

Usando que

$$\Delta_k = \frac{V_{k+1}(C) - V_{k+1}(X)}{S_k \cdot (u-d)},$$

resulta:

$$\begin{aligned}
X_{k+1}(C) &= X_k \cdot (1+i) + \Delta_k \cdot S_k \cdot (u - (1+i)) \\
&= V_k \cdot (1+i) + \frac{V_{k+1}(C) - V_{k+1}(X)}{u-d} \cdot (u - (1+i)) \\
&= V_k \cdot (1+i) + q \cdot (V_{k+1}(C) - V_{k+1}(X)) \\
&= pV_{k+1}(C) + qV_{k+1}(X) + q \cdot V_{k+1}(C) - q \cdot V_{k+1}(X) \\
&= V_{k+1}(C).
\end{aligned}$$

Por un argumento similar, se puede probar que $X_{k+1}(X) = V_{k+1}(X)$, y por inducción concluimos que $X_k = V_k$, para todo k, $0 \leq k \leq n$. $\square$

Resumimos en este punto algunas características del modelo binomial que son deseables para cualquier modelo que se aplique a la valoración de derivados financieros:

- Es un modelo *libre de arbitraje*.
- Es un modelo *completo*.
- Existe un *único precio* libre de arbitraje para un derivado, que se determina a partir de las probabilidades de riesgo neutral.

Notemos además que el proceso
$$\frac{X_k}{(1+i)^k}$$
también es una martingala. Para ver esto, usamos el hecho que $\frac{S_k}{(1+i)^k}$ es una martingala, y que X_k y S_k son variables aleatorias que dependen sólo de las primeras k tiradas. Así:

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{X_{k+1}}{(1+i)^{k+1}} \mid M_k\right] &= E\left[\Delta_k \frac{S_{k+1}}{(1+i)^{k+1}} + \frac{X_k - \Delta_k S_k}{(1+i)^k} \mid M_k\right] \\
&= \Delta_k E\left[\frac{S_{k+1}}{(1+i)^{k+1}} \mid M_k\right] + E\left[\frac{X_k - \Delta_k S_k}{(1+i)^k} \mid M_k\right] \\
&= \Delta_k \frac{S_k}{(1+i)^k} + \frac{X_k - \Delta_k S_k}{(1+i)^k} \\
&= \frac{X_k}{(1+i)^k}
\end{aligned}$$

Dado que $X_k = V_k$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n$, la propiedad de martingala implica que

$$\boxed{V_0 = E\left[\frac{V_n}{(1+i)^n}\right] = \frac{1}{(1+i)^n} E\left[V_n\right].}$$

En particular, si V_n es el payoff de una opción call, entonces $V_n = (S_n - K)^+$. Si es el payoff de una opción put, entonces $V_n = (K - S_n)^+$.

En el modelo binomial,

- la prima de una opción **call europea** con strike K que madura en n períodos está dada por:
$$c = (1+i)^{-n} \cdot E[(S_n - K)^+].$$
- La prima de una opción **put europea** con strike K que madura en n períodos está dada por:
$$p = (1+i)^{-n} \cdot E[(K - S_n)^+].$$

3.2. Paridad put-call

A partir de las fórmulas para la prima de la call y de la put, podemos obtener un importante resultado que es válido independientemente del modelo utilizado, y se denomina **paridad put-call**.

Notemos que, por la propiedad de aditividad de la esperanza matemática, tenemos que

$$\begin{aligned} c-p &= (1+i)^{-n}\cdot E[(S_n-K)^+] - (1+i)^{-n}\cdot E[(K-S_n)^+] \\ &= (1+i)^{-n}\cdot E[(S_n-K)^+ - (K-S_n)^+] \\ &= (1+i)^{-n}\cdot E[S_n-K]. \end{aligned}$$

Dado que K es una constante y $E[(1+i)^{-n}\cdot S_n] = S_0$, tenemos que tenemos que

$$c-p = S_0 - K\cdot\frac{1}{(1+i)^n}.$$

Paridad put-call
Si c y p denotan la prima de una call y una put europeas, respectivamente, sobre un mismo subyacente con valor hoy S_0, con igual madurez $t=n$ y strike K, entonces se cumple que:

$$c-p = S_0 - K\cdot\frac{1}{(1+i)^n}. \tag{3.12}$$

En particular, la fórmula (3.12) indica que es posible obtener la prima de una put conocida la prima de la call sobre el mismo subyacente, con igual strike y madurez. Notemos que S_0 es el valor del subyacente al momento de iniciar el contrato, y por ello también es un dato conocido y no aleatorio.

3.3. Valoración de opciones exóticas

Las opciones europeas y americanas se comercializan en el mercado formal, y son referenciadas como *opciones vainilla*. Estos contratos se comercializan en el mercado formal, y por ende están estandarizados.

Sin embargo, en el mercado secundario, se comercializan una gran variedad de productos financieros, denominados *opciones exóticas*. En esta sección veremos el caso de opciones exóticas cuyo payoff es dependiente de la trayectoria de precios del activo subyacente. En particular, analizaremos el caso de las opciones:

- Asiáticas: su payoff depende de un promedio de valores del activo.

- Barrera: se anulan o bien entran en vigencia, según si el activo ha cruzado determinado valor.
- Lookback: su payoff depende del máximo o mínimo valor que haya tomado el subyacente.

3.3.1. Opciones barrera

Las opciones barrera son opciones de compra o de venta, pero su payoff está condicionado a que el precio del subyacente haya cruzado una determinada barrera B durante la vigencia del contrato. De acuerdo a esto, se clasifican en opciones del tipo *Knock In* y *Knock Out*.

Las opciones barrera KnockIn sólo podrán ejercerse si el precio del subyacente ha cruzado la barrera B, mientras que las opciones KnockOut se anulan al momento que el subyacente cruza dicha barrera.

A su vez, según si se espera que el activo supere el valor de la barrera o baje de este valor, estas opciones reciben las siguientes denominaciones. En cada uno de los casos se cumple la condición $S_0 < B$ o $S_0 > B$:

- Up-and-out: $S_0 < B$, y la opción pierde valor si supera la barrera.
- Down-and-out: $S_0 > B$, y la opción pierde valor si baja de la barrera.
- Up-and-in: $S_0 < B$, y el activo debe superar B para activar la opción.
- Down-and-in: $S_0 > B$ y el activo debe bajar de B para activar la opción.

Ejemplo 3.3. Consideremos una opción call barrera down-and-out, con strike $K = 100$, con vencimiento en dos períodos, y barrera $B =$\$95. El activo subyacente sigue un modelo binomial con $S_0 = 100$, $u = 1.1$, $d = 0.9$, y la tasa libre de riesgo es del 5 %.

En este caso, si el activo toma un valor inferior a \$95 durante su trayectoria, la opción se anulará y no podrá ejercerse en $t = 2$.

El árbol binomial para esta opción, como para cualquier opción cuyo payoff sea dependiente de la trayectoria, deberá distinguir todas las trayectorias posibles del activo. Esto significa que si se consideran n períodos, habrá 2^n trayectorias posibles.

La prima para la opción se obtiene ahora de manera análoga al caso de una opción call europea, es decir, siguiendo el Teorema 3.1. El payoff de este derivado es una variable aleatoria que depende de las primeras 2 tiradas de moneda; o en un caso general, de las n primeras tiradas de moneda. Para representarlo en un árbol binomial, es conveniente distinguir todas las trayectorias de precios de subyacente. Aquellos nodos finales del árbol donde la opción

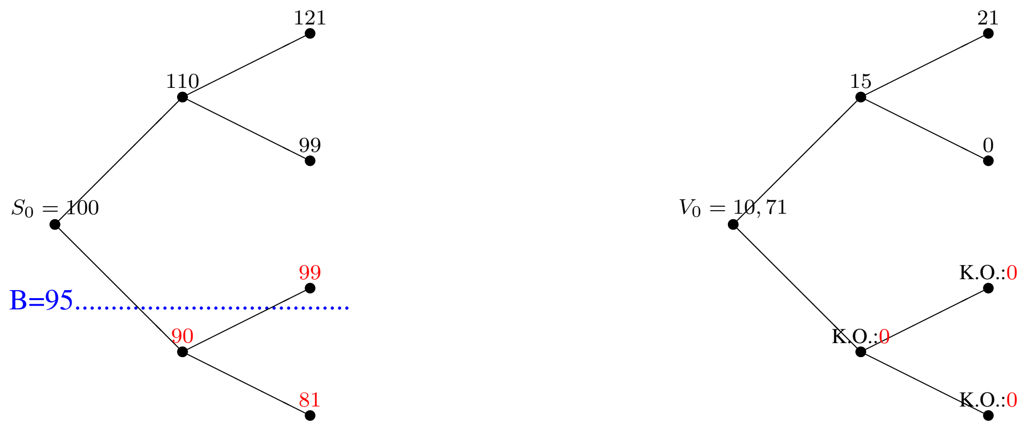

Figura 8: Opción barrera down and out

no se podrá ejercer, se considera un payoff nulo. En particular pueden eliminarse del cálculo aquellas trayectorias donde ocurre un Knock Out:

$$\begin{aligned} V_{barreraKO} &= \frac{1}{(1+i)^2} E[\text{Payoff de la opción barrera}] \\ &= \frac{1}{1.05^2} \left(0.75^2 \cdot 21 + 2 \cdot 0.75 \cdot 0.25 \cdot 0 + 0.25^2 \cdot 0\right) \\ &= 10.71. \end{aligned}$$

Notemos que una posición en una opción call knock-in más una call knock-out es equivalente a una posición en una opción call europea. Algo análogo ocurre con opciones del tipo put.

Esto permite encontrar algunas relaciones entre las primas de las opciones barrera y las europeas. Así, si denotamos con c y p la prima de una call y una put respectivamente, y utilizamos los subíndices i, o, u y d para indicar el tipo de opción barrera, tendremos que:

$$\begin{aligned} c &= c_{uo} + c_{ui} = c_{do} + c_{di} \\ p &= p_{uo} + p_{ui} = p_{do} + p_{di} \end{aligned}$$

3.3.2. Opciones lookback

Las opciones lookback son aquellas cuyo payoff depende del valor máximo o mínimo que haya alcanzado el subyacente durante la vigencia del contrato. A su vez, algunas de estas opciones tienen un strike fijo K, y otras tienen un strike *flotante*, que justamente es el máximo o el mínimo valor del activo.

Si el strike es fijo, K, entonces los payoff de una opción call o put están dados por:

$$\begin{cases} \max_{0\leq t\leq T}\{S(t)-K,0\} & \text{opción call} \\ \max_{0\leq t\leq T}\{K-S(t),0\} & \text{opción put} \end{cases}$$

Si el strike es flotante, entonces los payoff están dados por:

$$\begin{cases} S(T)-\min_{0\leq t\leq T}\{S(t)\} & \text{opción call} \\ \max_{0\leq t\leq T}\{S(t)\}-S(T) & \text{opción put} \end{cases}$$

Ejemplo 3.4. Consideremos una opción call lookback con strike flotante sobre un activo con $S_0 = 100$, $u = 1.2$, $d = 0.8$ e $i = 0.05$. La madurez de la opción es en dos períodos, por lo cual para cada trayectoria de precios $\{S_0, S_1, S_2\}$, el payoff estará dado por:

$$\min\{S_t, t = 0, 1, 2\}.$$

Las probabilidades de riesgo neutral están dadas en este caso por $p = 0.625$ y $q = 1-p = 0.375$.

Los árboles para la acción y para la opción están dados respectivamente por:

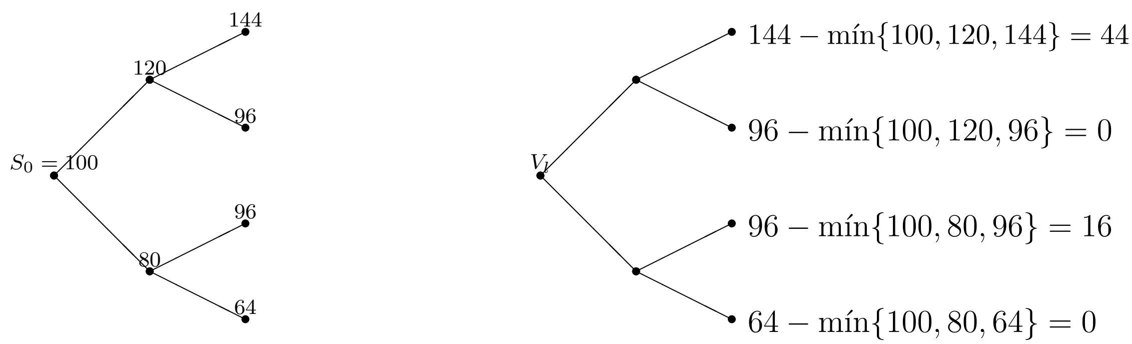

Figura 9: Call lookback con strike flotante

La prima de esta opción está dada entonces por:

$$\begin{aligned} V_{lookback} &= \frac{1}{(1+i)^2}\,E[\text{Payoff de la lookback}] \\ &= \frac{1}{1.05^2}\left(p^2\cdot 44 + p\cdot q\cdot 0 + q\cdot p\cdot 16 + q^2\cdot 0\right) \\ &= 18,99. \end{aligned}$$

3.3.3. Opciones asiáticas

Las opciones asiáticas son aquellas cuyo payoff depende del promedio de los precios que ha tomado el activo durante la vigencia de la opción. Asi, para cada trayectoria de precios se define S_{prom} como la media aritméticade los precios del subyacente.

Existen opciones asiáticas con strike fijo K, y en tal caso se toma a S_{prom} como precio del subyacente:

$$\begin{cases} \text{máx}\{S_{prom} - K, 0\} & \text{para una call} \\ \text{máx}\{K - S_{prom}, 0\} & \text{para una put} \end{cases}$$

Otras opciones asiáticas toman como strike flotante a S_{prom}:

$$\begin{cases} \text{máx}\{S(T) - S_{prom}, 0\} & \text{para una call} \\ \text{máx}\{S_{prom} - S(T), 0\} & \text{para una put.} \end{cases}$$

Ejemplo 3.5. Consideremos una opción asiática con strike fijo $K = 95$, con vencimiento en dos períodos, para una acción con $S_0 = 100$, $u = 1.2$, $d = 0.8$, siendo la tasa periódica del 5 %. El árbol de la acción y de la opción estarán dados como en la Figura 10.

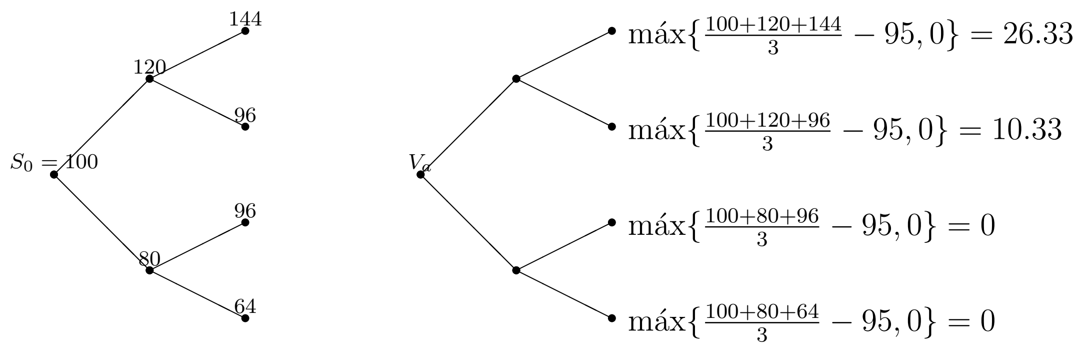

Figura 10: Opción asiática con strike fijo

En este caso, la prima de la opción asiática estará dada por:

$$\begin{aligned} V_{\text{Asiática}} &= \frac{1}{(1+i)^2} E[\text{Payoff de la opción asiática}] \\ &= \frac{1}{1.05^2} \left(p^2 \cdot 26.33 + p \cdot q \cdot 10.33 + q \cdot p \cdot 0 + q^2 \cdot 0\right) \\ &= 11,52. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6. Consideremos ahora la situación como en el Ejemplo 3.5, pero para una opción call asiática con strike flotante. En este caso, los payoffs de la opción estarán dados como en la Figura 11. Luego la prima de la opción es en este caso

$$V_0 = \frac{1}{1.05^2}(p^2 \cdot 22.66 + q \cdot p \cdot 4) = 8,878.$$

3.4. Valoración de opciones americanas

En una **opción americana**, el tenedor tiene derecho a ejercer en cualquier momento previo a la madurez de la opción. Es decir, en cada instante t previo al ejercicio de la opción, el tenedor puede optar por:

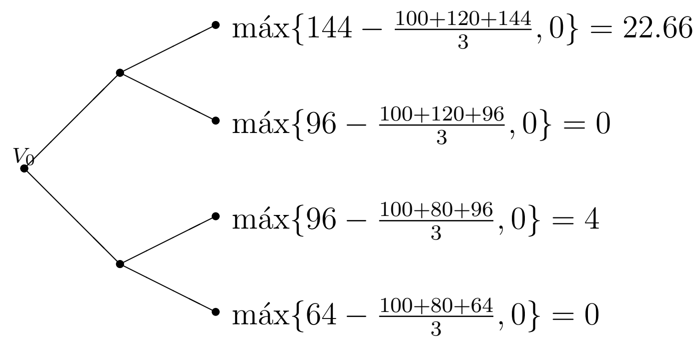

Figura 11: Opción asiática con strike promedio

- ejercer
- esperar un período más.

Dado que quien vende la opción necesita tener la mejor cobertura ante las dos posibilidades, el valor de la opción americana en cada instante es el máximo entre estas dos alternativas:

- **Ejercer**: cuyo valor está dado por el payoff en el instante t, y se denomina **valor intrínseco** de la opción.
- **Esperar**: cuyo valor en t es el valor descontado del valor esperado de los payoffs posibles en el siguiente paso.

La forma de valorar una opción americana consiste también en determinar un portfolio replicante, pero esta vez teniendo en cuenta que la opción podría ejercerse en cualquier momento. Por lo tanto, este portfolio deberá atender a la peor situación desde el punto de vista de quien vende la opción.

Ejemplo 3.7. Consideremos una opción put americana con strike 100 con madurez en tres períodos, sobre un activo con precio inicial $S_0 = 100$, y parámetros $u = 1.1$, $d = 0.9$ y tasa periódica $1 + i = 1,05$.

La Figura 12 muestra el árbol de la acción y los valores de la opción si la misma se ejerce en $t = 3$.

Para valorar la opción, lo hacemos nuevamente en sentido inverso, comenzando en $t = 2$. ¿Cómo debería estar constituido un portfolio para que en $t = 3$ iguale el payoff, pero además atienda a un posible ejercicio de la opción en este momento?

Consideramos el máximo valor entre ejercer en ese momento o esperar un período más. Esto es, el valor debe ser al menos el de una opción europea pero no inferior al valor intrínseco. Asi por ejemplo, en el nodo A (V_{dd}) en la Figura 12, el valor de la put está dado por su

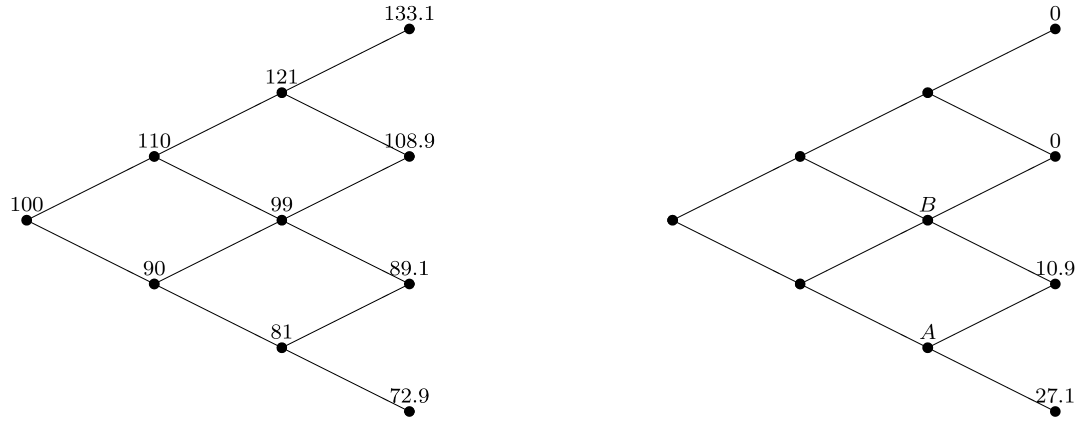

Figura 12: Árbol de la acción y payoff de la opción put con $K = 100$

valor intrínseco:

$$V_{ud} = \text{máx}\{100 - 81, \frac{1}{1.05}((0.75) \cdot 0 + (0.25) \cdot 27.15)\} = 19,$$

mientras que en el nodo B ($V_{ud} = V_{du}$) tiene más valor *esperar*:

$$V_{dd} = \text{máx}\{100 - 99, \frac{1}{1.05}((0.75) \cdot 0 + (0.25) \cdot 10.9)\} = 2.595.$$

Por último, $V_{uu} = 0$ ya que el valor intrínseco es 0 y los payoffs posibles en $t = 3$ también. Así obtenemoss que los valores de la opción en $t = 2$ son como en la Figura 13.

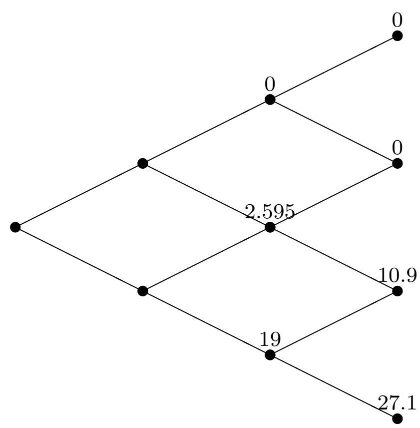

Figura 13: Valores de la put desde $t = 2$

Luego calculamos los valores del árbol para $t = 1$, tomando el máximo entre ejercer en ese momento y el valor descontado de los dos posibles valores siguientes. Así:

$$\begin{aligned} V_u &= \text{máx}(100 - 110, \quad \frac{1}{1.05}(0.75 \cdot 0 + 0.25 \cdot 2.595) = 0.617 \\ V_d &= \text{máx}(100 - 90, \quad \frac{1}{1.05}(0.75 \cdot 2.595 + 0.25 \cdot 19) = 10. \end{aligned}$$

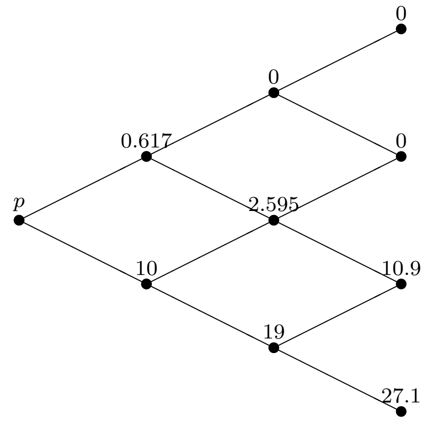

Figura 14: Valores de la put desde $t = 1$

Ver Figura 13.

Finalmente, la prima de la put está dada por

$$V_{put} = \text{máx}\{100 - 100, \frac{1}{1.05}(0.75 \cdot 0.617 + 0.25 \cdot 10) = 2.822$$

Dado que en cada nodo del árbol se considera el máximo entre el ejercicio anticipado y el valor descontado de los siguientes valores de la opción, necesariamente se cumple que la prima de la opción americana será siempre mayor o igual que la prima de una opción europea con igual madurez y strike.

Por ejemplo, en el caso del Ejemplo 3.7, la prima p_e de la put europea con strike 100 y madurez en tres períodos está dado por:

$$p_e = \frac{1}{(1,05)^3}(3pq^2 \cdot 10.9 + q^3 \cdot 27.1) = 1,6899.$$

La explicación matemática en el modelo es que el proceso de valores descontados del portfolio replicante es una **submartingala**:

$$E\left[\frac{V_k}{(1+i)^k} \mid M_{k-1}\right] \leq \frac{V_{k-1}}{(1+i)^{k-1}}.$$

Esto conduce a que

$$p_e = E[\frac{V_n}{(1+i)^n}] \leq V_0 = p_a.$$

Una mención especial merece la **call americana**. Si el strike de la opción es por ejemplo $K = 100$, cualquiera sea el momento en que ejerza siempre deberá pagar $\$100$. Entonces, analicemos su balance financiero en $t = k + 1$ en los siguientes dos casos:

a) Si ejerció en $t = k$, ya no dispone de los \$100 y sólo tiene una acción.

b) si no ejerció en $t = k$, pudo depositar los \$100 en el banco por un período más. Entonces en $t = k + 1$ gasta los \$100, compra la acción, pero además le sobran los intereses.

Conclusión: Nunca es conveniente el ejercicio temprano de una call americana y por lo tanto, la prima de una opción americana es igual a la prima de su equivalente europea.

4. El modelo de Black Scholes

En 1997, Myron Scholes y Robert Merton recibieron el Premio Nobel de Economía, luego de haber trabajado durante varios años en el desarrollo de una ingeniosa fórmula para la valoración de opciones call y put europeas. Este trabajo fue realizado en forma conjunta con Fisher Black, quien no recibió dicho premio ya que había fallecido en 1995. Esta fórmula comienza con el diseño de un modelo, denominado Modelo de Black-Scholes, en el cual describen el comportamiento de los precios de las acciones, bajo ciertas hipótesis de mercado, como un movimiento geométrico browniano. A partir de esto, logran derivar una ecuación diferencial, la *ecuación de Black-Scholes* que es satisfecha por las opciones call y put europeas, y cuya resolución permite dar el valor exacto de la prima de la opción en un escenario de mercado sin arbitraje. La solución de esta ecuación diferencial es conocida como la *Fórmula de Black-Scholes*.

Puede decirse que la historia de esta teoría comienza a mediados del siglo XIX, y no precisamente en investigaciones financieras. Robert Brown (1773-1858) fue un reconocido biólogo botánico escocés, que en particular observó y estudió el movimiento de las partículas de polen suspendidas en un líquido. Brown describió este comportamiento de las partículas como un movimiento aleatorio, y si bien no estableció una teoría explicativa, sí dio lugar a investigaciones posteriores a este fenómeno. De hecho, el modelo matemático que lo describe es conocido como *Movimiento Browniano*.

Hacia el año 1900, el matemático francés Louis Bachelier quien desarrolló su investigación en teorías financieras, expuso su tesis doctoral *La teoría de la especulación*, en la cual desarrolla por primera vez la teoría matemática que explica el movimiento browniano y lo utiliza particularmente para la valoración de opciones financieras. Esta teoría en realidad resultó errónea porque implicaría una distribución normal de la evolución de los precios de los activos. Aún así, fue uno de los impulsores del desarrollo de la matemática en el área de las finanzas.

En 1973, Black y Scholes publican el trabajo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, en el cual derivan una ecuación diferencial para opciones financieras asumiendo que los *retornos* de los activos, bajo ciertas hipótesis, se comportan de acuerdo a un movimiento browniano. Esto en particular describe a la evolución del precio de las acciones como un movimiento *geométrico* browniano. Casi al mismo tiempo, Merton publica el artículo *Theory of Rational Option Pricing* donde desarrolla sólidos fundamentos matemáticos para explicar el modelo, y en particular se refiere al trabajo de sus colegas como la *Teoría de Black Scholes*.

Cabe señalar que los trabajos de Black, Scholes y Merton han sido fundamentales para el desarrollo de teorías financieras que sirven para modelar diferentes escenarios financieros.

No es el objetivo de estas notas derivar la ecuación a partir de un modelo continuo, pero sí presentaremos la definición de un movimiento geométrico browniano, y derivaremos la fórmula de Black-Scholes a partir de una aproximación con modelos binomiales discretos.

4.1. El movimiento Browniano

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un **movimiento browniano** con **tendencia** μ y **volatilidad** σ es un proceso estocástico continuo $\{W(t),\ t \geq 0\}$ que satisface las siguientes propiedades:

- $W(0) = 0$, y
- si $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, entonces

$$W(t_1) = W(t_1) - W(0), \qquad W(t_2) - W(t_1), \qquad \ldots \qquad W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

son variables aleatorias independientes, y cada uno de estos incrementos está normalmente distribuido con media y varianza dadas por:

$$\mathrm{E}(W(t_i) - W(t_{i-1}) = \mu \cdot (t_i - t_{i-1}), \qquad \mathrm{Var}(W(t_i) - W(t_{i-1}) = \sigma^2 \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Notemos que hemos dado una caracterización del Movimiento browniano, y no propiamente una definición.

Un **Movimiento Geométrico Browniano** con **tendencia** μ y **volatilidad** σ es un proceso estocástico continuo $\{S(t),\ t \geq 0\}$ tal que

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$$

es un movimiento browniano con tendencia $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y volatilidad σ. En otras palabras, si

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}$$

donde $W(t)$ es un movimiento browniano con tendencia 0 y volatilidad 1. Es importante notar que en este caso, el valor esperado de $S(t)$ está dado por

$$E[S(t)] = S(0)e^{\mu \cdot t}. \tag{4.1}$$

y esa es la razón por la cual μ se denomina tendencia.

4.2. Capitalización continua

En los modelos continuos de valoración de derivados se suele utilizar una tasa de interés de capitalización continua. Esto es, se asume que una cuenta bancaria se incrementa de acuerdo a la relación:

$$B(t) = B(0) \cdot e^{rt}, \qquad t \geq 0, \tag{4.2}$$

donde $r > 0$ es la **tasa de interés libre de riesgo** y $B(0)$ es el capital disponible en tiempo $t = 0$. Esta forma de capitalización puede entenderse como el límite de una capitalización compuesta (ver 1.1), cuando los períodos de capitalización tienden a 0. Veamos esto.

Consideramos $r > 0$, lo que en el lenguaje financiero se llama una tasa nominal anual, y una subdivisión del año en m períodos iguales. Tomamos como tasa periódica a $\frac{r}{m}$, por lo cual en n períodos ($t = n/m$) un monto de dinero se incrementa según la fórmula:

$$\begin{aligned} B(t) &= B(0)\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot \frac{n}{m}} \\ &= B(0)\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot t}. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = e^r,$$

entonces para m suficientemente grande la capitalización compuesta (1.1) es aproximadamente igual a la capitalización continua (4.2).

4.3. El MGB como límite del modelo binomial

Consideremos el espacio de probabilidad Ω formado por los resultados de n tiradas independientes de una moneda $\omega_1\omega_2 \dots \omega_n$. Sea t un tiempo determinado y consideramos una subdivisión del intervalo $[0, t]$ en n subintervalos iguales. Denotamos $t_i = i\,\frac{t}{n}$, $0 \leq i \leq n$. Sea $\sigma > 0$ y sea $S(t)$ el proceso estocástico que representa la evolución de precios de un activo (acción) cuyo valor inicial es $S(0) = S_0$, y tal que:

$$S(t_{i+1}) = \begin{cases} S(t_i)\, e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} & \text{si la } i\text{-ésima moneda es cara} \\ S(t_i)\, e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} & \text{si la } i\text{-ésima moneda es cruz.} \end{cases}$$

Esto es, los valores de u y d están dados por

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} = 1/u.$$

Para cada j, $0 \leq j \leq n$, sea X_j la variable aleatoria dada por:

$$X_j = \begin{cases} \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} & \text{si } \omega_j = C \qquad \text{(la j-ésima tirada es cara),} \\ -\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} & \text{si } \omega_j = X \qquad \text{(la j-ésima tirada es cruz),} \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$S(t_k) = S(t) = S_0\, e^{X_1+X_2+\cdots+X_k}.$$

Si r es la tasa libre de riesgo de capitalización continua, entonces en un período de longitud Δt se cumple que la tasa periódica i libre de riesgo cumple $1+i = e^{r\Delta t}$. Así, la medida de probabilidad neutral al riesgo en este modelo binomial está dada por

$$p_n = \frac{e^{r\frac{t}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}, \qquad q_n = 1 - p_n.$$

Para n suficientemente grande, estas probabilidades pueden aproximarse hasta el orden 1 de $\frac{t}{n}$ en el desarrollo en serie de cada exponencial. Esto es:

$$\begin{aligned} e^{r\frac{t}{n}} &\simeq 1 + r\frac{t}{n} \\ e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} &\simeq 1 + \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\frac{t}{n}, \\ e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} &\simeq 1 - \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\frac{t}{n}. \end{aligned}$$

Luego

$$p_n \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r-\sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right).$$

Bajo esta probabilidad, las variables X_i tienen media y varianza dada por:

$$E[X_i] = (2\,p_n - 1)\,\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\frac{t}{n}, \qquad Var[X_i] = \sigma^2\,\frac{t}{n}.$$

Observemos que las variables X_j son independientes, igualmente distribuidas. Así, por el Teorema Central del Límite podemos decir que para un n grande su suma tiene una distribución aproximadamente normal.

Luego, para un n suficientemente grande, la variable aleatoria

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = (X_1 + \cdots + X_n)$$

tiene una distribución aproximadamente normal, con media y varianza dadas por:

$$E[\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)] = (r - \sigma^2/2)\cdot t, \qquad Var[\ln\left(\frac{S(t)}{S_0)}\right)] = \sigma^2\cdot t.$$

Para analizar que el exponente en la expresión de $S(t)$ cumple las propiedades de incrementos estacionarios e independientes al igual que el movimiento browniano, consideramos las sumas parciales:

$$W^{(n)}(t_k) = \sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\,(X_1 + X_2 + \cdots + X_k), \qquad t_k = \frac{k}{n}\,t, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Dado que las variables X_i son independientes, igualmente distribuidas, entonces si $j < k < m$ resulta

$$W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j) = X_{t_{j+1}} + \cdots + X_{t_k},$$
$$W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_k) = X_{t_{k+1}} + \cdots + X_{t_m},$$

por lo cual las variables aleatorias $W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j)$ y $W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_k)$ resultan ser independientes. Además, bajo las probabilidades de riesgo neutral se cumple que:

$$\begin{aligned} E[W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j)] &= (r - \sigma^2/2)(t_k - t_j) \\ Var[W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j)] &= \sigma^2(t_k - t_j) \end{aligned}$$

Por último, si estos incrementos tienen una suficiente cantidad de términos, podemos decir que su distribución es aproximadamente normal.

En este sentido decimos que el proceso discreto

$$\ln(S(t_k)/S_0) = W^{(n)}(t_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

tiende a un movimiento browniano con tendencia $r - \frac{\sigma^2}{2}$ y volatilidad σ. Equivalentemente,

$$S(t_k) = S(0)\, e^{W^{(n)}(t_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

tiende a un movimiento geométrico browniano con tendencia r y volatilidad σ.

4.4. La fórmula de Black Scholes

La hipótesis del modelo de Black Scholes supone que el activo $S(t)$ se comporta de acuerdo a un movimiento geométrico browniano, con tendencia μ y volatilidad σ. Sin embargo se demuestra que, bajo una hipótesis de no arbitrage es posible realizar un cambio de medida bajo la cual $S(t)$ sigue un movimiento geométrico browniano con tendencia r y volatilidad σ, siendo r la tasa libre de riesgo con capitalización continua. Esta medida de probabilidad también se llama **medida de probabilidad neutral al riesgo.** Notemos la analogía con el modelo binomial: *bajo la hipótesis de no arbitraje,* $d < 1 + i < u$, *es posible definir la probabilidad neutral al riesgo.*

Hemos visto que en este caso, $S(t)$ puede ser aproximado con un proceso discreto:

$$S(t) = S(n\frac{t}{n}) \sim S(0)e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}(X_1+\cdots+X_n)}.$$

Consideremos entonces una opción call europea sobre este activo, con madurez en $t = T$ y payoff $(S(T) - K)^+$, y sea r la tasa libre de riesgo. Entonces, si aproximamos el movimiento browniano por el modelo binomial, sabemos que la prima c de esta opción en $t = 0$ está dada por:

$$c = e^{-rT} \cdot E[(S(T) - K)^+], \tag{4.3}$$

donde E denota el valor esperado bajo la probabilidad neutral al riesgo.

Esto es exactamente lo que establece la fórmula de Black-Scholes para valorar la opción call, pero asumiendo que $S(t)$ sigue un movimiento geométrico browniano.

Así, en la medida de probabilidad neutral al riesgo $S(t)$ sigue un movimiento geométrico browniano de la forma

$$S_0 e^{W(t)}$$

donde $W(t)$ tiene tendencia $r - \sigma^2/2$ y volatilidad σ. Luego podemos calcular (4.3) a partir de la distribución de probabilidad de $W(T)$. En efecto, la densidad de la variable aleatoria $W(T)$ está dada por:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y - (r - \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right).$$

Luego, la prima de la opción call se obtiene resolviendo:

$$c = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (S(0)e^y - K)^+ f(y)\, dy.$$

Observando que el integrando es igual a 0 para $y < \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)$, esta integral puede escribirse como:

$$c = e^{-rT} \int_{\log \frac{K}{S(0)}}^{\infty} S(0)e^y f(y)\, dy - Ke^{-rT} \int_{\log \frac{K}{S(0)}}^{\infty} f(y)\, dy. \tag{4.4}$$

Ahora bien, en la primera integral tenemos que:

$$\begin{aligned} e^{-rT} e^y e^{-\frac{(y-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}} &= \exp\left(-rT + y - \frac{(y - (r - \frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{(y - (r + \frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}\right) \end{aligned}$$

Estandarizamos la distribución normal aplicando el cambio de variables

$$x = \frac{y - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

obtenemos que

$$e^{-rT} \int_{\log \frac{K}{S(0)}}^{\infty} S(0)e^y f(y)\, dy = S(0)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_U^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

donde

$$U = \frac{\log \frac{K}{S(0)} - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = -\frac{\log \frac{S(0)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Sea Φ a la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar:

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx,$$

y utilizando la propiedad que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \Phi(-a),$$

obtenemos que la primera integral de la expresión (4.4) es igual a

$$S(0)\Phi\left(\frac{\log \frac{S(0)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Con cálculos análogos, concluimos que la segunda integral en (4.4) es igual a:

$$Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = K\Phi\left(\frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)$$

Valoración de una opción call europea

Sea c la prima de una opción call europea, con strike K y madurez T, sobre un activo cuyo precio sigue un movimiento geométrico browniano con volatilidad σ. Sea r la tasa libre de riesgo. Entonces, bajo una hipótesis de no arbitraje se cumple que:

$$c = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

con

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Si ahora consideramos una opción put europea, con strike K y madurez T sobre el mismo activo, su prima p puede ser calculada por la paridad put-call:

$$c - p = S(0) - Ke^{-rT}.$$

Así, resulta:

$$\begin{aligned} p &= S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) - S(0) + Ke^{-rT} \\ &= S(0)(\Phi(d_1) - 1) + Ke^{-rT}(1 - \Phi(d_2)) \end{aligned}$$

Las propiedades de simetría de la distribución normal implican que $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, por lo cual concluimos que

$$p = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S(0)\Phi(-d_1).$$

La misma fórmula puede ser obtenida a través de un cálculo análogo al realizado para obtener la prima de una call.

Referencias

[1] STEVEN E. SHREVE, *Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model.* (2005) - Edit. Springer.

[2] JOHN C. HULL, *Options, futures and other derivatives* , Prentice Hall finance series.

5. Ejercicios

Ejercicio 1: Una acción está valuada en \$110. En un año el precio de la acción será de \$143 o \$77. Considerar una opción call con strike $K = \$133$ con madurez en un año, y una tasa anual libre de riesgo es 3 %.

a) Calcular las probabilidades de riesgo neutral.

b) Describir un portfolio replicante para este derivado, calculando el valor de Δ.

c) Determinar la prima de la opción.

Ejercicio 2: Una acción está valuada en \$100. En un año el precio de la acción será de \$130 o \$90. Una opción sobre esta acción tiene payoff $V_u = 0$ o $V_d = 5$ pesos, respectivamente, y la tasa de interés efectiva anual sin riesgo es del 5 %.

a) Determinar qué tipo de opción europea tiene este payoff.

b) Calcular las probabilidades de riesgo neutral.

c) Describir un portfolio replicante para este derivado, calculando el valor de Δ.

d) Determinar la prima del derivado.

Ejercicio 3: Considerar un modelo binomial de acciones con los parámetros $u = 1.2$ y $d = 0.8$, siendo $S_0 = 120$. Una opción call europea que vence en $t = 3$ tiene un strike $K = 130$ y la tasa de interés periódica libre de riesgo es del 6 %.

a) Determinar el valor de la opción V_t, para $t = 0, 1, 2, 3$.

b) Determinar el proceso de delta-cobertura Δ_t, para $t = 0, 1, 2$.

c) Calcular la prima de una put europea sobre el mismo subyacente, con igual strike y madurez.

d) Describir el portfolio replicante para el escenario $\omega = CXC$.

Ejercicio 4: Considerar un modelo binomial para una acción con los parámetros $u = 1,1$ y $d = 0,9$, siendo $S_0 = 100$. Considerar además una opción call *barrera up and out* que vence en $t = 4$, y tiene un precio de ejercicio $K = 85$ y una *barrera superior* igual a 115, siendo la tasa de interés instantánea libre de riesgo igual a 0,06.

a) Construir el árbol binomial de la acción.

b) Identificar todas las trayectorias de precios de la acción y los correspondientes payoff de opción.

c) Determinar la prima de la opción en $t = 0$ en base al valor esperado calculado con todos los posibles payoff finales de la opción.

d) Considerar ahora la opción call *barrera up and in* con igual strike que la anterior y determinar el precio de la opción en $t = 0$.

e) Verificar que la suma de los precios calculados en c) y d) es igual al precio de una opción call europea de igual strike.

Ejercicio 5: Considerar el modelo binomial para una acción con los parámetros $u = 1.2$ y $d = 0.9$, siendo $S_0 = 52$. Considerar además una opción call *lookback con strike flotante* que vence en $t = 3$, siendo la tasa libre de riesgo $i = 0.05$.

a) Construir el árbol de la acción.

b) Identificar todas las trayectorias de precios de la acción y los correspondientes payoff de opción.

c) Determinar el precio de la opción en $t = 0$ en base al valor esperado calculado con todos los posibles payoff finales de la opción.

Ejercicio 6: Considerar los mismos parámetros para el movimiento de los precios de la acción y la misma tasa de interés instantánea libre de riesgo que en el ejercicio anterior.

a) Calcular el valor de una opción call *asiática con strike fijo* $K = 50$ con madurez en $t = 3$.

b) Calcular el valor de una opción put *asiática con strike flotante*, con madurez en $t = 3$.

Ejercicio 7: El precio actual de una acción es de \$40. En cada uno de los siguientes 3 períodos de tres meses se espera que aumente un $10\,\%$ o disminuya un $10\,\%$. La tasa de interés efectiva mensual constante es del $2\,\%$.

a) Calcular la prima de una opción put Americana con strike $K = \$42$.

b) Determinar si este precio es mayor o igual que el de una opcion put Europea con el mismo strike. Indicar en qué trayectorias de precios conviene el ejercicio temprano de la opción.

Ejercicio 8: El precio de cierta acción es actualmente \$30. Durante cada período de 2 meses para los siguientes 4 meses se espera que aumente un 8 % o disminuya un 10 %. La tasa de interés efectiva bimensual es 6 %. Usar un árbol de dos pasos para calcular el valor de un derivado Europeo con payoff igual a $[max\{30 - S(T), 0\}]^2$, donde $S(T)$ es el precio de la acción en 4 meses. Este tipo de derivado se denomina *power option*. ¿Si el derivado fuera de estilo Americano, debería ser ejercido antes del vencimiento?

Ejercicio 9: Aplicar la fórmula de Black-Scholes para calcular la prima de una opción call europea sobre una acción con valor $S(0) = \$52$ y una volatilidad anual del 30 %. El strike de la opción es $K = \$50$, la tasa libre de riesgo anual del 12 %, y la madurez en 3 meses.

Ejercicio 10: Aplicar la fórmula de Black-Scholes para determinar la prima de una opción put europea sobre una acción, siendo el precio del activo $\$69$, la volatilidad anual del 30 %, el strike de la opción \$70, la tasa libre de riesgo anual del 5 %, y la madurez en 6 meses.