El Axioma de Martin

Pedro Sánchez Terraf[*][†]

13 de noviembre de 2017

Resumen

El enunciado del *Axioma de Martin* (*MA*) involucra conjuntos parcialmente ordenados y afirma la existencia de subconjuntos “genéricos” de los mismos. Es una consecuencia de la *Hipótesis del Continuo* de Cantor y, como ella, es independiente del resto de los axiomas usuales de la Teoría de Conjuntos (o “la matemática”, dependiendo del punto de vista). Discutiremos aplicaciones de *MA* a problemas combinatorios, de Teoría de la Medida muy básicos y aritmética cardinal.

1. Características Cardinales del Continuo

Se afirma que toda la Matemática se puede basar en la Teoría de Conjuntos. Específicamente, la gran mayoría de los objetos matemáticos y los razonamientos que hacemos sobre ellos se pueden codificar en la *lógica de primer orden* junto con los axiomas *ZFC* (siglas que provienen de los apellidos de **Zermelo** y **Fraenkel**, y del Axioma de Elección, o *Axiom of* ***Choice*** (*AC*) en inglés). Una conclusión de este supuesto epistemológico es que los enunciados que no pueden ser demostrados ni refutados por la teoría *ZFC* son “irresolubles” con la matemática actual.

El más famoso de tales enunciados, por lejos, es la

[*]Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación.

[†]Centro de Investigación y Estudios de Matemática (CIEM-FaMAF). Córdoba. Argentina.
Financiado por Secyt-UNC subsidio 30720150100529CB.
Enviado a publicar a las *Actas XIV Congreso Monteiro*.

Hipótesis del Continuo (CH): Todo subconjunto no contable de $\mathbb{R}$ es biyectivo con $\mathbb{R}$.

(Aquí decimos que un conjunto es *contable* si es finito o biyectivo con $\mathbb{N}$). El cardinal de $\mathbb{N}$ se escribe $\aleph_0$ y se puede probar que hay un mínimo cardinal no contable, $\aleph_1$. El cardinal de $\mathbb{R}$ es igual al cardinal de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $2 = \{0, 1\}$, y por ello lo llamamos $2^{\aleph_0}$, o bien $\mathfrak{c}$ (por "el continuo"). Como $\mathbb{R}$ no es contable, tiene subconjuntos de tamaño $\aleph_1$. Por tal motivo, la forma más cortita de enunciar *CH* es escribir $2^{\aleph_0} = \aleph_1$: no hay cardinales entre el de $\mathbb{N}$ y el de $\mathbb{R}$.

Antes de seguir, haremos algunas observaciones rápidas respecto de la noción de *cardinal*: en este apunte no necesitaremos su definición precisa (que se puede consultar, por ejemplo, en [1]) pero daremos una idea de cómo funcionan. Diremos que dos conjuntos X e Y son *equipotentes* o "biyectivos" si existe una biyección entre ellos. La equipotencia es una relación de equivalencia, y los cardinales son representantes de cada clase. Denotaremos con $|X|$ el cardinal de X. Los cardinales se pueden ordenar mediante la siguiente relación: $|X| \leq |Y|$ si y sólo si existe una función $f : X \to Y$ inyectiva. Entre otros resultados, se prueba que $\leq$ es un *buen orden*: toda familia no vacía de cardinales tiene elemento mínimo. Además, se da que $|X| \leq |Y|$ si y sólo si existe una suryección $h : Y \to X$. De esta manera, para demostrar desigualdades estrictas entre cardinales $|Y| < |X|$, basta probar que no hay una función sobreyectiva de Y en X.

Volviendo al hilo anterior, *CH* no se puede probar ni refutar con los axiomas actuales (a menos que sean *inconsistentes*, i.e. lleven a contradicciones). En general, los axiomas de *ZFC* no determinan en qué posición de la "recta cardinal" está el conjunto de los números reales: no deciden si es igual a $\aleph_1$, ó $\aleph_5$, o si acaso es menor que $\aleph_{31415}$. El "monstruo feo de la incompletitud" (como decía Erdös) muestra su peor cara con este problema.

En esta situación, como en otras relativamente similares, una estrategia razonable es averiguar qué relación tiene $\mathfrak{c}$ con otros cardinales, llamados *características cardinales del continuo*, que resultan de estudiar objetos relacionados con $\mathbb{R}$. Entre ellos se encuentran $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ (el conjunto de las partes de $\mathbb{N}$), ${}^{\mathbb{N}}2$ (las funciones de $\mathbb{N}$ en el 2), ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ (las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$), y otros más, que son canónicamente biyectivos entre sí. Las características cardinales son siempre no contables y menores o iguales a $\mathfrak{c}$. En diversos *universos* de *ZFC*, las características pueden tener valores distintos dos a dos y a su vez distintos de $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$. Por tal motivo, estas características son llamadas “invariantes cardinales”, puesto que determinan parte de la estructura cardinal de dichos universos.

En un universo donde vale *CH*, todas las características colapsan a $\mathfrak{c}$. En este apunte nos dedicaremos al *Axioma de Martin (MA)*, que tiene esta misma consecuencia pero por razones completamente diferentes. Lo más interesante de *MA* es que los conceptos involucrados en su definición y uso son los mismos que se utilizan en la técnica de *forzamiento* o **forcing**, una de las principales para demostrar resultados de independencia de *ZFC*. Presentar forcing usando *MA* ya es estándar (por ejemplo, en Kunen [8] y su clásico [7]).

Este apunte está basado en parte en las notas de un curso dictado por Justin Palumbo [10].

1.1. Dominación de funciones

La primera característica del continuo que introduciremos resulta de estudiar la relación de dominación eventual entre funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

Definición 1. Sean $f, g \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$. Decimos que g *domina a* f, $f <^* g$, si $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : f(n) < g(n)$.

Si g domina a f entonces es “casi siempre mayor” (i.e., salvo un conjunto finito de argumentos). En general, también se pueden definir $\leq^*$, $=^*$, y resulta que $f <^* g \leftrightarrow f \leq^* g \wedge f\,(\neq)^* g$.

Ejercicio 2. ¿Es $(\neq)^*$ la negación de $=^*$?

Es fácil ver que toda familia finita de funciones $\{f_i : i < k\}$ está *acotada*, es decir, se puede dominar: basta tomar $g(n) := \max\{f_i(n) : i < k\} + 1$. Por otro lado, el orden $<^*$ sobre ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ es mucho más interesante que el orden $<$ punto a punto. De hecho, una diferencia es la siguiente:

Proposición 3. *Toda familia contable* $\{f_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ *está acotada.*

Demostración. El argumento es una diagonalización: $g(n) := \max\{f_i(n) : i < n\} + 1$. □

Esto nos lleva a preguntarnos, ¿cuántas funciones pueden dominarse a la vez?

Definición 4. El *número de acotación* es el menor cardinal de una familia no acotada:

$$\mathfrak{b} := \min\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \wedge \forall g \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}\ g \text{ no domina a } \mathscr{F}\}.$$

Este cardinal está bien definido puesto que ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ no se puede dominar. Además, es inmediato por la Proposición 3 que $\aleph_0 < \mathfrak{b} \leq 2^{\aleph_0}$ y luego *CH* implica $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$.

1.2. Familias casi disjuntas

La segunda característica que introduciremos surge de considerar "casi particiones" de $\mathbb{N}$.

Definición 5.

1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$. A y B son *casi disjuntos* si $A \cap B$ es finito.
2. Una familia de conjuntos es *casi disjunta* si sus elementos son casi disjuntos dos a dos.
3. Una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ es *loca* si es casi disjunta y es maximal (según inclusión) con esa propiedad.

El nombre "loca" proviene de la traducción de la siglas *mad* del inglés "maximal almost disjoint". Como consecuencia de la definición, si $\mathscr{F}$ es loca y $X \subseteq \mathbb{N}$ es infinito, hay $A \in \mathscr{F}$ tal que $A \cap X$ es infinito.

Lema 6. *No hay familias locas contables.*

Demostración. Observemos que para toda familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$,

> (∇) si $\mathscr{F}$ es casi disjunta y $A_0, \ldots, A_{n+1} \in \mathscr{F}$ entonces $A_{n+1} \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_n)$ es cofinita en A_{n+1}.

Para verlo, usemos que $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$:

$$\begin{aligned} A_{n+1} \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n) &= A_{n+1} \setminus (A_{n+1} \cap (A_0 \cup \dots \cup A_n)) \\ &= A_{n+1} \setminus ((A_{n+1} \cap A_0) \cup \dots \cup (A_{n+1} \cap A_n)), \end{aligned}$$

donde la unión es finita.

Supongamos ahora que $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ es loca. Construiremos recursivamente $B \subseteq \mathbb{N}$ que sea casi disjunto de todos los A_k. Sea $b_0 \in A_0$ arbitrario. Suponiendo $b_0, \dots, b_n$ ya elegidos, sea $b_{n+1} \in A_{n+1} \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_n)$ tal que $b_{n+1} > b_0, \dots, b_n$ (es posible por (∇)). $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, y $B \cap A_n \subseteq \{b_k : k \leq n\}$ (puesto que por construcción, $b_k \notin A_n$ para todo $k > n$). □

Aunque parezca, este lema no requiere ninguna forma de AC.

Ejercicio 7. Hay una familia casi disjunta de $\mathbb{N}$ de tamaño $2^{\aleph_0}$. Usando el Lema de Zorn, hay familias locas de ese tamaño.

Luego, podemos definir

$$\mathfrak{a} := \text{mín}\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \text{ es loca}\},$$

y concluimos que $\aleph_0 < \mathfrak{a} \leq 2^{\aleph_0}$.

1.3. Una desigualdad

Las dos características que introdujimos no son independientes entre sí.

Teorema 8 (Solomon)**.** $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.

Demostración. Sea K un conjunto de índices de cardinal menor a $\mathfrak{b}$. Veremos que ninguna familia casi disjunta indizada por K puede ser maximal. Asumimos que $\mathbb{N} \subseteq K$.

(De hecho, usualmente en Teoría de Conjuntos, cada cardinal λ es naturalmente un conjunto de tamaño λ, y está bien ordenado de manera que tiene un segmento inicial isomorfo a $\mathbb{N}$. Los dos elementos siguientes a todos los naturales se denotan con ω y $\omega + 1$, y los usaremos más abajo como elementos de $K \setminus \mathbb{N}$).

n	0	1	2	3	$\dots$
f_ω	2	2	4	6	$\dots$
$f_{\omega+1}$	5	4	3	2	$\dots$

Tabla 1: Funciones asociadas a la familia $\mathscr{F}$.

Sea $\mathscr{F} = \{A_\alpha : \alpha \in K\}$. Por la observación ($\nabla$), podemos suponer que $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ son disjuntos dos a dos. Enumeramos cada A_n ($n \in \mathbb{N}$) de manera creciente: $A_n = \left\{a_m^{(n)} : m \in \mathbb{N}\right\}$, con $a_m^{(n)} < a_{m+1}^{(n)}$ para todo m y definamos, para $\alpha \in K \setminus \mathbb{N}$,

$$f_\alpha(n) := \text{mín}\left\{m : A_n \cap A_\alpha < a_m^{(n)}\right\}.$$

En la Figura 1 se ve cómo se definen estas funciones. Los conjuntos A_n con $n \in \mathbb{N}$ están dispuestos verticalmente, y son cortados "transversalmente" por los A_α con $\alpha \in K \setminus \mathbb{N}$ (en líneas punteadas). Esta terminología tiene sentido porque cada intersección $A_n \cap A_\alpha$ es finita. Luego, el valor de $f_\alpha(n)$ es el índice del menor elemento de A_n que acota estrictamente a dicha intersección. En el ejemplo, tenemos los valores indicados en la Tabla 1. Prosiguiendo con el

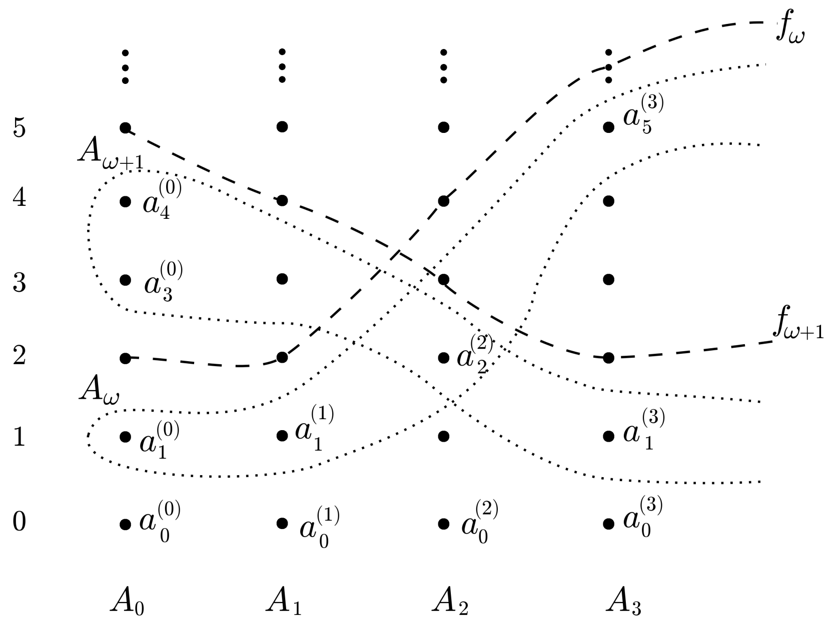

Figura 1: Las funciones f_α para $\alpha \in K \setminus \mathbb{N}$.

argumento, tenemos una familia de menos de $\mathfrak{b}$ funciones, así que hay una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que las domina a todas. Definamos entonces $B := \left\{a^{(n)}_{f(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$; por construcción, $A_n \cap B = \left\{a^{(n)}_{f(n)}\right\}$. Veremos que B es casi disjunto de todos los A_α.

Sea $\alpha \in K \setminus \mathbb{N}$. Como $f_\alpha <^* f$, existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$, $f_\alpha(n) < f(n)$. Esto implica que

$$a^{(n)}_{f_\alpha(n)} < a^{(n)}_{f(n)} \in A_n.$$

Como $a^{(n)}_{f_\alpha(n)}$ es cota superior de $A_n \cap A_\alpha$, concluimos que $a^{(n)}_{f(n)} \notin A_\alpha$. Luego

$$A_\alpha \cap B \subseteq \left\{a^{(m)}_{f(m)} : m < n_0\right\},$$

obviamente un conjunto finito. □

Es consistente que se dé $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, pero también lo es (por un teorema de S. Shelah) que no coincidan.

2. Nociones de Forzamiento

La técnica de *forcing* o forzamiento permite construir objetos mediante aproximaciones. En general es muy difícil o imposible dar una descripción completa del objeto a construir, pero esto no significa que no haya uno: muchas veces son la mayoría, y la gran idea detrás del forcing es que el objeto "genérico" cumplirá con los requerimientos, con una noción adecuada de genericidad. El Axioma de Martin (*MA*) asegura que hay objetos genéricos para una variedad de situaciones, y su desarrollo fue en gran medida simultáneo con el forcing. Por eso ahora se usa *MA* para motivar este último.

Desarrollaremos nuestra intuición a partir de un ejemplo. Sean I y J dos conjuntos (para evitar trivialidades, tomemos I infinito), y supongamos que queremos construir una $f : I \to J$ (esencialmente, un conjunto de pares). Nuestro conjunto de aproximaciones serán las *funciones finitas* de I a J ($\mathrm{Fn}(I, J)$), esto es, funciones p tales que $\operatorname{dom} p$ es un subconjunto finito de I e $\operatorname{img} p \subseteq J$. Podemos asociar a un elemento $p \in \mathrm{Fn}(I, J)$ la "condición" $p \subseteq f$ (f extiende a p) y adoptaremos este nombre para nuestras aproximaciones. Según esta interpretación, la condición p nos da un fragmento finito de información sobre

f. Por ejemplo, si $I = J = \mathbb{N}$ y $p = \{\langle 0, 1\rangle\}$, $p \subseteq f$ nos dice simplemente que $f(0) = 1$. Diremos que una condición p es **más fuerte** que q si $p \supseteq q$, puesto que tal p nos da más información sobre f que q:

$$p \supseteq q \quad \text{implica} \quad p \subseteq f \to q \subseteq f. \tag{1}$$

En lógica (y en general) se usa mucho la correspondencia entre una propiedad o "predicado" $P(x)$ de elementos de algún conjunto y el subconjunto de los x que la satisfacen (su "extensión"). Luego, las propiedades más débiles (laxas) se corresponden con mayores extensiones. Por eso, respetando el orden de dichas extensiones, utilizaremos la notación $p \leq q$ para indicar que p es más fuerte que q. Reescribiendo la implicación (1), obtenemos

$$p \leq q \quad \text{implica} \quad p \subseteq f \to q \subseteq f,$$

que parece tener más sentido. Como ejemplo particular, la condición más grande de todas es la que no nos da nada de información: en este caso es $\varnothing$, la función vacía.

En resumen, nuestras aproximaciones forman un *conjunto parcialmente ordenado* (poset) con máximo $\mathbb{1}$:

$$\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}\rangle := \langle \mathrm{Fn}(I, J), \supseteq, \varnothing\rangle$$

Es decir, $\leq$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva sobre $\mathbb{P}$ que cumple $p \leq \mathbb{1}$ para todo $p \in \mathbb{P}$. Llamaremos **noción de forzamiento** a todo poset con máximo.

Como dijimos más arriba, una condición p sólo da información finita, o local, de la f que intentamos construir. Otras propiedades de la función f no son de la forma $p \subseteq f$. Si nuestro objetivo es obtener una función *total*, necesitamos asegurar que para cada $i \in I$, i esté en el dominio de f. Esta propiedad involucra el conjunto de condiciones $D_i := \{p \in \mathbb{P} : i \in \operatorname{dom} p\}$. Es posible que no sepamos de antemano qué valor nos conviene que tenga f en i, así que desearíamos poder asegurar que sin importar qué información (finita) imponemos sobre f, en algún momento podremos cumplir con el requisito que $i \in \operatorname{dom} f$. Esto motiva la siguiente

Definición 9. Sea $\mathbb{P}$ un poset. $D \subseteq \mathbb{P}$ es **denso** si para todo $q \in \mathbb{P}$ existe $p \in D$ tal que $p \leq q$.

Es decir, si D es denso y tenemos una aproximación q a f, entonces podemos conseguir una aproximación más precisa (una condición más fuerte) que además está en D. Los conjuntos D_i de arriba son densos.

Por otro lado, observemos que el conjunto de todas las partes finitas de f,

$$G := \{f \restriction U : U \subseteq I \text{ finito } \} \subseteq \mathbb{P}$$

es la descripción completa de f en $\mathbb{P}$. Podemos observar que G cumple con las siguientes propiedades:

1. si $p \in G$ y $p \leq q$ entonces $q \in G$ (es **creciente**),
2. si $p, q \in G$, entonces hay $r \in G$ tal que $r \leq p, q$ (p y q son **compatibles en** G).

Un subconjunto no vacío de un poset que satisface ambas condiciones se denomina **filtro** en $\mathbb{P}$.

Ejercicio 10. Sea $\mathbf{B} := \langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Entonces un filtro en el poset $\langle B \setminus \{0\}, \leq\rangle$ es exactamente un filtro no trivial de $\mathbf{B}$.

Recíprocamente, todo filtro G en $\mathrm{Fn}(I, J)$ define una función parcial $\bigcup G$. Pero para que esté definida en todo I necesitamos que corte a cada conjunto D_i.

Definición 11. Sea $\mathscr{D}$ una familia de conjuntos densos de $\mathbb{P}$. Un filtro G de $\mathbb{P}$ es **$\mathscr{D}$-genérico para** $\mathbb{P}$ si para todo $D \in \mathscr{D}$, $D \cap G \neq \varnothing$.

Ejemplo 1. Sean $E_j := \{p \in \mathrm{Fn}(I, J) : j \in \mathrm{img}\, p\}$ para cada $j \in J$. Estos conjuntos son densos en $\mathrm{Fn}(I, J)$. Si $\mathscr{D} := \{D_i : i \in I\} \cup \{E_j : j \in J\}$, un filtro $\mathscr{D}$-genérico es exactamente (las partes finitas de) una función $f : I \to J$ sobre.

Siempre que tengamos una cantidad contable de conjuntos densos, va a haber un filtro que los corte a todos:

Teorema 12 (Existencia de filtro genérico)**.** *Si $\mathbb{P}$ es un poset, $\mathscr{D}$ es una familia contable de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ y $p \in \mathbb{P}$, hay un filtro $\mathscr{D}$-genérico G tal que $p \in G$.*

Demostración. Sea $\mathscr{D} = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos $p_0 \in D_0$ tal que $p_0 \leq p$. Recursivamente elegimos $p_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$. Luego $G := \{q \in \mathbb{P} : \exists n(p_n \leq q)\}$ cumple con lo requerido. □

Se puede pensar que este resultado, llamado también el Lema de Rasiowa-Sikorski, es una versión del Teorema de Categoría de Baire. El Axioma de Martin es una generalización del Teorema 12 para familias más grandes de conjuntos densos, y lo discutiremos en la siguiente sección.

3. El Axioma de Martin

Nuestra siguiente preocupación es saber cuán ajustadas son las hipótesis del Teorema 12. Por ejemplo, ¿vale si la familia $\mathscr{D}$ no es contable? Respuesta rebuscada: sin salirse del Universo, no.

Ejemplo 2. Sea J un conjunto no contable cualquiera, y sea $\mathbb{P} := \mathrm{Fn}(\mathbb{N}, J)$. Los conjuntos

$$D_n := \{p \in \mathbb{P} : n \in \operatorname{dom} p\}$$

y

$$E_j := \{p \in \mathbb{P} : j \in \operatorname{img} p\}$$

son densos. Si consideramos la familia $\mathscr{D} := \{D_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{E_j : j \in J\}$, no podría existir un filtro $\mathscr{D}$-genérico puesto que correspondería con una función sobreyectiva de $\mathbb{N}$ en J.

Necesitaremos un par de definiciones más.

Definición 13.
1. $A \subseteq \mathbb{P}$ es una **anticadena** si sus elementos son incompatibles dos a dos (no hay condición que extienda a dos elementos distintos de A simultáneamente).
2. $\mathbb{P}$ satisface la **condición de cadenas contables** o bien "es **ccc**" si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es contable.

Ejercicio 14. $\mathrm{Fn}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ es contable; luego es trivialmente ccc.

Notemos que el poset $\mathrm{Fn}(\mathbb{N}, J)$ es muy "ancho"; su subconjunto $\{\{\langle 0, j\rangle\} : j \in J\}$ es una anticadena no contable.

Si no hubiera tal anticadena, aún podría existir un filtro genérico.

Definición 15. $MA(\kappa)$ es el enunciado: para todo poset $\mathbb{P}$ ccc y una familia $\mathscr{D}$ de densos en $\mathbb{P}$ con $|\mathscr{D}| \leq \kappa$, hay un filtro $\mathscr{D}$-genérico para $\mathbb{P}$.

Luego el Teorema 12 implica $MA(\aleph_0)$ (de hecho, sin la hipótesis de ccc).

Lema 16. *Si κ es un cardinal tal que $MA(\kappa)$, entonces $\kappa < 2^{\aleph_0}$.*

$2^{\aleph_0}$ es el cardinal del conjunto de todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Luego, la interpretación de este resultado es la siguiente: suponiendo $MA(\kappa)$, ninguna familia de funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ indizada por un conjunto K de cardinal κ, puede contener a todas.

Demostración. Sean $\mathbb{P} := \mathrm{Fn}(\mathbb{N},\mathbb{N})$, K un conjunto de tamaño κ, y sean $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(j \in K)$ funciones; veremos que hay una función distinta a todas ellas. Definamos $H_j := \{p \in \mathbb{P} : \exists n\ p(n) \neq f_j(n)\}$; es fácil ver que son densos. Sea ahora $\mathscr{D} := \{D_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{H_j : j \in K\}$; luego $|\mathscr{D}| = \kappa$. Como $\mathbb{P}$ es ccc por el Ejercicio 14, podemos aplicar $MA(\kappa)$ y entonces existe un filtro $\mathscr{D}$-genérico G para $\mathbb{P}$. Como antes, $f := \bigcup G$ es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Basta ver que para todo $j \in K$, $f \neq f_j$.

Para ello, fijemos j. Como G es $\mathscr{D}$-genérico, hay un $p \in G \cap H_j$. Luego hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $p(n) \neq f_j(n)$. Como $p \subseteq f$, $f(n) \neq f_j(n)$, y en conclusión $f \neq f_j$. □

Finalmente podemos enunciar el **Axioma de Martin**:

(MA) Para todo $\kappa < 2^{\aleph_0}$, se da $MA(\kappa)$.

El Axioma de Martin logra, en muchas circunstancias, extender propiedades que sabemos que valen para familias contables a cualquier familia de cardinal menor al de $\mathbb{R}$. En particular, tiene consecuencias interesantes para las características cardinales del continuo.

Para cerrar esta sección, consideremos el comentario “rebuscado” de más arriba y el Ejemplo 2, para el caso particular $J := \mathbb{R}$. Fuera de joda, no puede haber una suryección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$..., ¿o sí?

La técnica de forcing permite simular que construimos un filtro genérico G para $\mathrm{Fn}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ que interseca a *todos* sus subconjuntos densos. Ese filtro, y la función f_G asociada a él no pueden estar en nuestro universo de conjuntos actual V; podemos pensar que es una función “imaginaria”. Pero f_G pertenece al menor universo que incluye a V y contiene a G, $V[G]$, y es una suryección de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}^V$ (la versión de V de los números reales). Decimos que en la *extensión genérica* $V[G]$, $|\mathbb{R}|$ *colapsa* (a $\aleph_0$) y $\mathbb{R}^V$ pasa a ser un subconjunto contable de $\mathbb{R}^{V[G]}$.

Sólo una punta del ovillo de esta fascinante área.

4. Aplicaciones del Axioma de Martin

Notemos que *CH* implica (o más bien, “trivializa” a) *MA*. El Axioma de Martin comparte varias consecuencias de *CH*, pero por razones distintas. Donde *CH* obliga a varias familias a tener cardinal $2^{\aleph_0}$ por “falta de lugar” (no habría cardinales entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$), *MA* lo hace porque muestra que dichas familias son muy “ricas”. Volveremos sobre esto.

La primera aplicación será a las características cardinales del continuo.

Teorema 17. *MA*(κ) *implica* $\kappa < \mathfrak{b}$.

Demostración. Supongamos $|K| = \kappa$ y sea $\mathscr{F} = \{f_j\}_{j \in K}$ una familia de funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. Queremos una $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que las domine a todas. Sea $\mathbb{P}_b$ el conjunto $\{\langle p, A\rangle : p \in \mathrm{Fn}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), A \subseteq \mathscr{F} \text{ finito}\}$ con el siguiente orden: $\langle q, B\rangle \leq \langle p, A\rangle$ si y sólo si:

1. $q \supseteq p$,

2. $B \supseteq A$, y

3. $\forall n \in \operatorname{dom} q \setminus \operatorname{dom} p,\ q(n) > f(n)$, para toda $f \in A$.

La primera coordenada p de un elemento de $\mathbb{P}_b$ nos va aproximando a la f que queremos construir, mientras que la segunda coordenada nos "promete" que toda mejor aproximación dominará a las funciones en A.

Veamos que $\mathbb{P}_b$ es ccc. Supongamos que $\{\langle p_j, A_j\rangle : j \in J\} \subseteq \mathbb{P}_b$ no es contable. Como $\mathrm{Fn}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ es contable, hay $j \neq l$ tales que $p_j = p_l$. Luego $\langle p_j, A_j \cup A_l\rangle$ es cota inferior, así que no puede ser una anticadena.

Definamos los conjuntos densos relevantes.

$$D_n := \{\langle p, A\rangle : n \in \operatorname{dom} p\} \text{ es denso en } \mathbb{P}_b.$$

Para verlo, sea $\langle q, A\rangle \in \mathbb{P}_b$. Si $n \in \operatorname{dom} q$, $q \in D_n$ y no hay nada que probar; sino, sea

$$p := q \cup \{\langle n, 1 + \text{máx}\{f(n) : f \in A\}\rangle\}.$$

Entonces $\langle p, A\rangle \in D_n$ y es más fuerte que $\langle q, A\rangle$. Por otro lado, podemos ver fácilmente que

$$E_f := \{\langle q, B\rangle : f \in B\} \text{ es denso en } \mathbb{P}_b :$$

si $\langle p, A\rangle \in \mathbb{P}_b$, entonces $\langle p, A \cup \{f\}\rangle \in E_f$ y extiende a $\langle p, A\rangle$.

Por $MA(\kappa)$, hay un filtro $(\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{E_f\}_{f\in\mathscr{F}})$-genérico G. Sea

$$h := \bigcup\{p \in \mathrm{Fn}(\mathbb{N},\mathbb{N}) : \exists A(\langle p, A\rangle \in G)\}.$$

Luego tenemos lo siguiente:

- h es función puesto que si $\langle p, A\rangle, \langle q, B\rangle \in G$ entonces p y q son compatibles en $\mathrm{Fn}(\mathbb{N},\mathbb{N})$; y
- es total (usando que G interseca a cada D_n).

Sea ahora $f \in \mathscr{F}$; queremos ver que $f <^* h$. Por genericidad, existe $\langle p, A\rangle \in G \cap E_f$, luego $f \in A$. Sea $n \notin \operatorname{dom} p$; nuevamente, por ser G genérico, podemos elegir $\langle q, B\rangle \in G$ tal que $n \in \operatorname{dom} q$. Como G es filtro, hay $\langle r, C\rangle \in G$ que extiende a $\langle p, A\rangle$ y a $\langle q, B\rangle$. Como $r \supseteq q$, $n \in \operatorname{dom} r \setminus \operatorname{dom} p$. Luego, como $\langle r, C\rangle \leq \langle p, A\rangle$, obtenemos $r(n) \geq f(n)$. Pero por construcción, $h(n) = r(n)$. En conclusión, $h(n) > f(n)$ para todo $n \notin \operatorname{dom} p$ (un conjunto finito), así que $f <^* h$. $\square$

La noción de forzamiento usada en la prueba anterior fue descubierta por Hechler [4].

Corolario 18. *MA implica* $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$.

Luego, gracias al Teorema 8, *MA* también tiene por consecuencia $\mathfrak{a} = 2^{\aleph_0}$.

En la prueba anterior, podemos observar que $MA(\kappa)$ nos da un método para obtener una función que cumple con κ restricciones. En ese sentido, *MA* asegura que la familia de las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ tiene una gran riqueza de elementos, o cierta propiedad de “clausura”.

Por otro lado, si uno dota $\mathbb{N}$ de la topología discreta y ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ de la topología producto, resulta que fijada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, el conjunto de las funciones que dominan a f es un conjunto topológicamente pequeño. Más precisamente, es de *primera categoría*: está incluido en una unión contable de cerrados con interior vacío. Luego, hallar una cota de $\mathscr{F}$ es un mérito extra de Hechler.

MA tiene otras consecuencias importantes respecto de los “conjuntos pequeños”:

Teorema 19. $MA(\kappa)$ *implica que la unión de* κ *conjuntos de primera categoría de* $\mathbb{R}$ *es de primera categoría.*

Teorema 20. $MA(\kappa)$ *implica que la unión de* κ *conjuntos de medida de Lebesgue* 0 *tiene medida nula.*

Este último teorema se prueba utilizando los posets “ameba”:

$$\mathbb{A}_\varepsilon := \langle \{p \subseteq \mathbb{R} : p \text{ abierto}, \mu(p) < \varepsilon\}, \supseteq \rangle$$

donde $\varepsilon > 0$ y μ es la medida de Lebesgue.

Ejercicio 21. (*) Probar que los posets $\mathbb{A}_\varepsilon$ son ccc.

Sabemos que “unión contable de conjuntos contables es contable” (¡Ojo! Esto depende de *AC*). En particular, $\mathbb{R}$ no es la unión de una cantidad contable de conjuntos contables. El Teorema de König muestra que $\mathbb{R}$ *no es la unión de una cantidad contable de conjuntos de cardinal menor que* $2^{\aleph_0}$. Usando el Teorema 20 se puede reforzar este enunciado, cuya prueba es un ejercicio muy lindo.

Corolario 22. *MA implica que* $2^{\aleph_0}$ *es* regular*:* $\mathbb{R}$ *no es unión de una cantidad menor que* $2^{\aleph_0}$ *de conjuntos de cardinal menor que* $2^{\aleph_0}$.

5. Para saber más

Concluiremos con algunas recomendaciones de lectura. Como esta sección es sumamente subjetiva, la escribiré en la “primera persona del singular”.

Naive Set Theory [3] Es una primera introducción, muy básica, a la Teoría de Conjuntos, e incluye un desarrollo de cómo representar los objetos matemáticos usuales usando sólo conjuntos.

Notes on Set Theory [9] Un libro básico pero a la vez muy completo. Da un panorama desde cero, con buena discusión del universo de conjuntos y versiones alternativas, como por ejemplo las que admiten átomos o “urelementos” (en la teoría de conjuntos estándar *ZFC* todo es un conjunto) o conjuntos mal fundados (por ejemplo, que cumplen $x = \{x\}$; éstos no son admitidos en *ZFC*). Otro gran punto a favor de este libro es que introduce el hermoso tema de la *Teoría de Conjuntos Descriptiva*.

Abstract Set Theory [2] Este libro fue escrito por Abraham Fraenkel; como dijimos arriba, la “*F*” de *ZFC* es por este señor. Este libro es bastante “charlado”, para una amplia audiencia matemática, que desarrolla el tema mediante infinidad de ejemplos. Es muy interesante, pero a la vez un poquito lento si uno busca profundizar.

Discovering Modern Set Theory A diferencia de los anteriores, este va a un poco más al punto. El Volumen I [5] se presta para el auto-aprendizaje, si se tiene la disciplina de hacer todos los ejercicios que pide el libro (cada dos párrafos hay uno). Diría que es mi favorito entre los básicos. En el Volumen II [6] hay un surtido de diversos temas y es el único de los libros introductorios que aborda *MA*.

Teoría axiomática de conjuntos [1] Esta excelente introducción en castellano está compuesta por las notas de un curso que dicta Roberto Cignoli en la Universidad de Buenos Aires. Incluye además algunos temas más avanzados, como la introducción a los modelos internos de *ZF*, el tratamiento de la absolutez y la prueba de la consistencia relativa de *AC* usando el modelo *HOD* de los conjuntos definibles por ordinales hereditariamente. Está disponible en http://cms.dm.uba.ar/depto/public/grado/fascgrado8.pdf.

"El Kunen" [8] Este libro, cuyo nombre serio es *Set Theory*, es la puerta grande para empezar a estudiar Teoría de Conjuntos seriamente. Uso una denominación tan informal porque es *el* libro para iniciar el estudio de las pruebas de independencia; por ello, es casi como un miembro de la familia.

Un blog en castellano Finalmente, y de carácter informal (como este apunte), pueden visitar

> http://p.sanchezterraf.com.ar/

donde hay algunas discusiones sobre temas variados de Teoría de Conjuntos.

Referencias

[1] R. CIGNOLI, "Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción", Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (2016).

[2] A.A. FRAENKEL, "Abstract Set Theory", North-Holland, Amsterdam (1961), segunda edición.

[3] P. HALMOS, "Naive Set Theory", Springer (1960).

[4] S.H. HECHLER, On the existence of certain cofinal sets of ${}^{\omega}\omega$, en: D.S. Scott (Ed.), Axiomatic Set Theory, Part 2, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **13.2**, American Mathematical Society (1974), pp. 155–174.

[5] W. JUST, M. WEESE, "Discovering Modern Set Theory. I", Grad. Studies in Mathematics **8**, American Mathematical Society (1996).

[6] W. JUST, M. WEESE, "Discovering Modern Set Theory. II", Grad. Studies in Mathematics **18**, American Mathematical Society (1997).

[7] K. KUNEN, "Set theory: An Introduction to Independence Proofs", Elsevier Science, Amsterdam, Lausanne, New York (1980).

[8] K. KUNEN, "Set Theory", College Publications (2011), segunda edición. Edición revisada, 2013.

[9] Y. MOSCHOVAKIS, “Notes on Set Theory”, Springer-Verlag (1994).

[10] J. PALUMBO, Forcing and independence in set theory, Webpage (2009 — accedido en Agosto 2014). UCLA Logic Center Summer School for Undergraduates.