40º Reunión de Educación Matemática
Unión Matemática Argentina
11-15 diciembre 2017

Eugenio Hernández
Universidad Autónoma de Madrid

Clasificación de isometrías en el plano con ayuda de Geogebra.

Un movimiento es una transformación de un plano en sí mismo que no modifica las distancias. Por ejemplo, las traslaciones, las rotaciones y las simetrías con respecto a una recta son movimientos. ¿Son estos todos?

Mostraremos como usar Geogebra para experimentar como se comparta la composición de dos o más movimientos. Con la experiencia acumulada al realizar estos experimentos y algo de razonamiento, lograremos clasificar los movimientos planos.

Mostraremos también como pueden usarse estas transformaciones para resolver algunos problemas geométricos de manera sencilla.

El programa Geogebra puede descargarse grátis desde el sitio www.geogebra.com/. No es necesario tener conocimientos previos del programa para seguir el curso.

1. Movimientos en el plano. Ejemplos y aplicaciones.
   - 1.1 Traslaciones.
   - 1.2. Rotaciones o giros.
   - 1.3. Simetría central o simetría con respecto a un punto.
   - 1.4. Simetría o reflexión con respecto a un eje.

2. Composición de movimientos en el plano.

3. Clasificación de los movimientos en el plano.

4. Algunos problemas para resolver con simetrías.
   - 4.1. Triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triángulo acutángulo.
   - 4.2. Áreas de triángulos formados por cevianas.

Referencias.

1. H. S. M. Coxeter y S. L. Greitzer, Geometry revisited, *The Mathematical Association of America, Número 19, Tercera edición*, 1967. (Capítulo 4)

2. E. Hernández, M. J. Vázquez y M. A. Zurro, Álgebra lineal y Geometría, *Pearson Education S.A., Tercera edición, Madrid*, 2012. (Sección 10.4)

3. I. M. Yaglom, Geometric transformations I, (traducido del ruso por A. Shields), *The Mathematical Association of America, Número 8*, 1962.

---

1. Movimientos en el plano. Ejemplos y aplicaciones.

Definición 1.1. Una **transformación** es una aplicación de un conjunto en sí mismo tal que todo punto P del conjunto tiene una única imagen P' y todo punto Q' del conjunto tiene una preimagen Q.

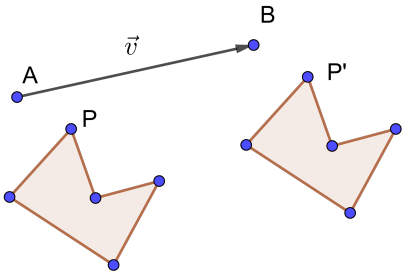
Nota: Sólo trataremos en este curso de transformaciones en el plano.

Definición 1.2. Las transformaciones en el plano que conservan las distancias entre puntos se llaman **movimientos** o **isometrías**.

Nota: Como los movimientos conservan las distancias también lo hacen con las áreas.

Se exponen a continuación varios ejemplos de movimientos y algunas aplicaciones.

1.1. Traslaciones.



Definición 1.3. Se llama **traslación de vector** $\vec{v} = \vec{AB}$, y se denota por $T_{\vec{v}}$, a la transformación que asocia a cada punto del plano P el punto $P' = T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{AB}$, es decir, P' es el extremo del vector $P + \vec{AB}$.

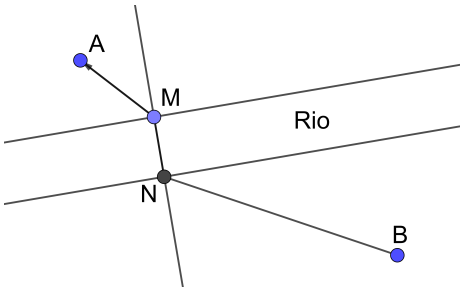
Nota: La traslación de vector $\vec{0}$ se llama **identidad** y se escribe I.

Ejercicio 1.1. *Con la ayuda de una traslación y de Geogebra, inscribir en una circunferencia dada un rectángulo con dos lados opuestos paralelos y de igual longitud a un segmento dado $\overline{AB}$. (La longitud del segmento $\overline{AB}$ es inferior al diámetro de la circunferencia.)*

Ejercicio 1.2. *En un triángulo $\triangle(ABC)$ inscribir un triángulo igual y paralelo a un segmento dado $\overline{DE}$. Utiliza las traslaciones y Geogebra para resolver este ejercicio.*

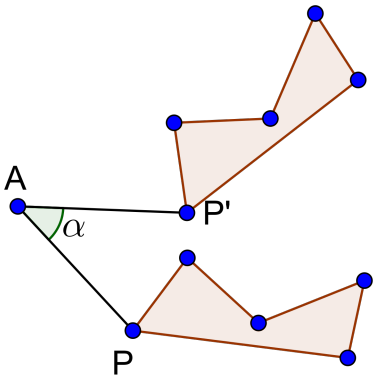
Ejercicio 1.3. *Se dan dos círculos C_1 y C_2 y una recta r. Dibujar una recta paralela a r, tal que la distancia entre los puntos en los que la nueva recta corta a C_1 y a C_2 sea igual a una longitud dada a. ¿Cuántas soluciones podemos tener?*

Ejercicio 1.4. *¿En que punto debemos construir un puente MN sobre un rio que separe dos ciudades A y B (figura de la derecha). para que el camino $AMNB$ sea lo más corto posible? (Las riveras del río se suponen lineas rectas y el puente perpendicular al río)*



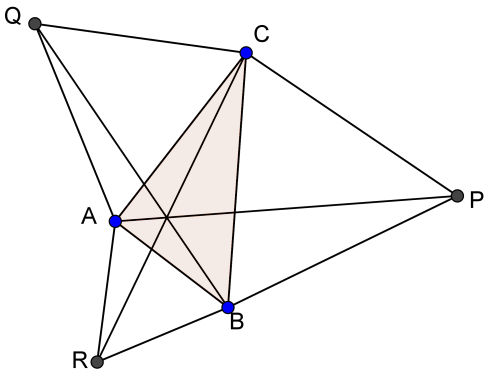
1.2. Rotaciones o giros.

Para poder realizar una *rotación o giro* se necesita un punto A que sirva de centro de giro y un ángulo α. Por convenio, el sentido positivo de los ángulos en un plano es el contrario al giro de las agujas de un reloj.



Definición 1.4. Se llama **rotación o giro** de centro A y ángulo α, y se denota por $R_{A,\alpha}$, a la transformación que asocia a cada punto P del plano el punto $P' = R_{A,\alpha}(P)$ de tal manera que el ángulo $\measuredangle PAP'$ mida exactamente α.

Ejercicio 1.5. *En un triángulo cualquiera $\triangle(ABC)$ dibujar un triángulo equilátero externo sobre cada uno de sus lados como se muestra en la figura de la derecha. Demostrar que los segmentos $\overline{AP}, \overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ tienen la misma longitud.(Sugerencia: Considerar el efecto de las rotaciones de 60° con respecto a cada uno de los vértices.)*



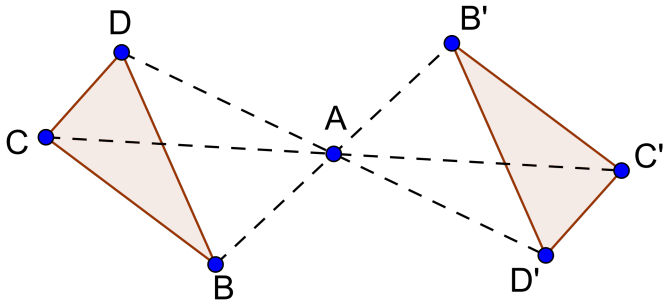
Información: Los tres segmentos $\overline{AP}, \overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ descritos en el Ejercicio 1.5 se cortan en un punto, que se llama *punto de Fermat* del triángulo $\triangle(ABC)$. El punto de Fermat F de un triángulo $\triangle(ABC)$ satisface que la suma de las distancias de F a los vértices del triángulo es mínima.

Ejercicio 1.6. *Dibujar cuadrados externos sobre los lados de un paralelogramo cualquiera. Demostrar, usando rotaciones de 90°, que los centros de estos cuadrados forman otro cuadrado.*

1.3. Simetría central o simetría con respecto a un punto.

La simetría con respecto a un punto es una caso especial de giro en el que se gira 180° con respecto a un punto.

Definición 1.5. Se llama **simetría** con respecto a un punto A, y se denota por S_A, a la transformación que asocia a cada punto P del plano el punto $P' = S_A(P)$ de tal manera que A es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.



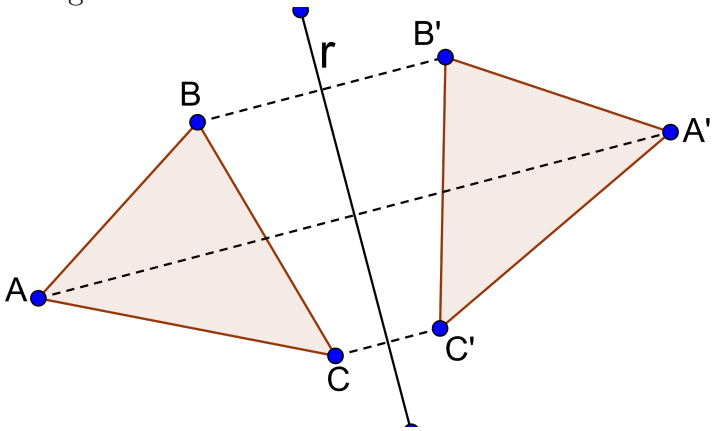
Ejercicio 1.7. *Sea A un punto común a dos circunferencias que se cortan. Usar una simetría central para construir una recta que pase por A y que corte a los dos círculos en cuerdas iguales.*

Ejercicio 1.8. *Por un punto A en el exterior de un círculo, construir una recta (si se puede) que corte a su circunferencia en dos puntos P y Q tales que $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}|$.*

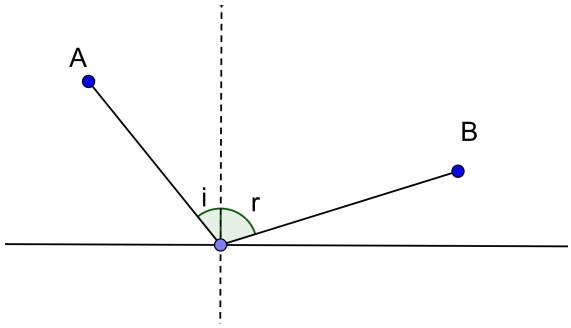
1.4. Simetría o reflexión con respecto a un eje.

Para poder realizar una *simetría o reflexión con respecto a un eje* se necesita una recta que haga de eje de simetría.

Definición 1.6. Se llama **simetría o reflexión** con respecto a la recta r, y se denota por S_r, a la transformación que asocia a cada punto P del plano el punto $P' = S_r(P)$ de tal manera que la recta r es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

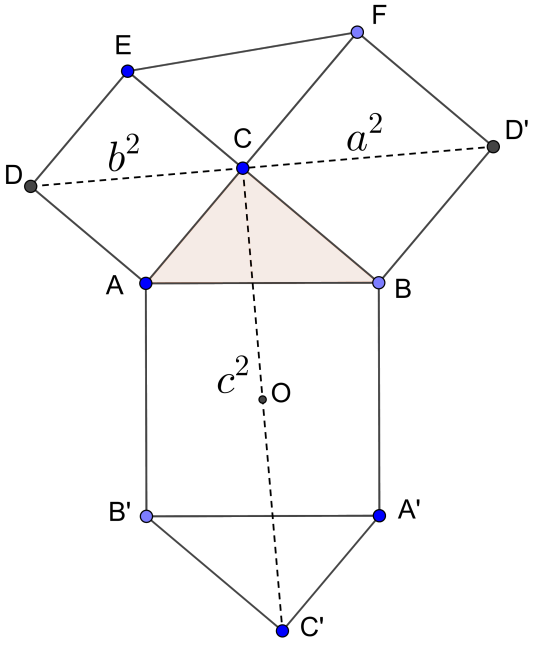


Ejercicio 1.9. *La luz sigue el camino más corto entre dos puntos. ¿Qué camino seguirá la luz para ir desde el punto A al punto B de la figura de la derecha, reflejándose en la recta l? ¿Qué relación hay entre el ángulo de incidencía i y el de reflexión r de un rayo de luz?.*



Ejercicio 1.10. *De todos los triángulos de igual base y área, ¿como es el que tiene menor perimetro? (buscar una solución usando una simetría).*

Hay muchas demostraciones del Teorema de Pitágoras. Leonardo da Vinci propuso una basada en la figura de la derecha. En esta figura se comienza con un triángulo rectángulo $\triangle(ABC)$ y sobre cada uno de sus lados se dibuja un cuadrado externo. Después se dibuja el triángulo rectángulo $\triangle(ECF)$ que es el simétrico del triángulo $\triangle(ABC)$ con respecto a la recta $\overline{DD'}$, y el triángulo $\triangle(A'C'B')$ que es el simétrico del triángulo $\triangle(ABC)$ respecto a centro del cuadrado trazado sobre su hipotenusa.



Ejercicio 1.11. *Usar simetrías y rotaciones para mostrar el Teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo $\triangle(ABC)$, basándose en la figura que se muestra a la derecha.*

2. Composición de movimientos en el plano.

Dadas dos transformaciones en el plano, T_1 y T_2, pueden realizarse una después de la otra. Esta operación se llama **composición**. Se escribe $T_2 \circ T_1$ si se hace primero la transformación T_1 y luego la T_2. Se escribe $T_1 \circ T_2$ si se hace primero la transformación T_2 y luego la T_1.

Puesto que un movimiento es una transformación que conserva las distancias, la composición de dos movimientos también las conserva, y es por tanto otro movimiento.

Ejercicio 2.1. *a) Comprueba con Geogebra que la composición $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ de dos traslaciones es otra traslación. ¿Cuál es el vector de traslación de $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$? ¿Es la composición de traslaciones una operación conmutativa?*

Ejercicio 2.2. *b) Comprueba con Geogebra que la composición $R_{A,\beta} \circ R_{A,\alpha}$ de dos rotaciones con igual centro de giro A es otra rotación. ¿Cuál es el centro y el ángulo de giro de $R_{A,\beta} \circ R_{A,\alpha}$? ¿Es la composición de dos rotaciones de igual centro de giro una operación conmutativa?*

Ejercicio 2.3. *b) Comprueba con Geogebra que la composición $S_m \circ S_\ell$ de dos simetrías con respecto a las rectas **paralelas** ℓ y m es una traslación. ¿Cuál es el vector de traslación de $S_m \circ S_\ell$? ¿Es la composición de dos simetrías de ejes paralelos una operación conmutativa?*

Definición 2.1. Decimos que M_1 es el movimiento inverso de M_2 si se cumple $M_1 \circ M_2 = I$ y $M_2 \circ M_1 = I$, donde I denota el movimiento identidad. que no cambia la posición de los puntos del plano. En este caso escribimos $M_2 = M_1^{-1}$.

Nota: Puede demostrarse que si se cumple $M_1 \circ M_2 = I$ también se cumple $M_2 \circ M_1 = I$, por lo que en la práctica solo hace falta comprobar una de las dos igualdades para hallar la inversa de un movimiento.

Ejercicio 2.4. *¿Cuál es el movimiento inverso de la traslación $T_{\vec{u}}$ de vector $\vec{u}$? ¿Y el de la rotación $R_{A,\alpha}$ de centro A y ángulo α? ¿Y el de la simetría axial S_ℓ con respecto a la recta l?*

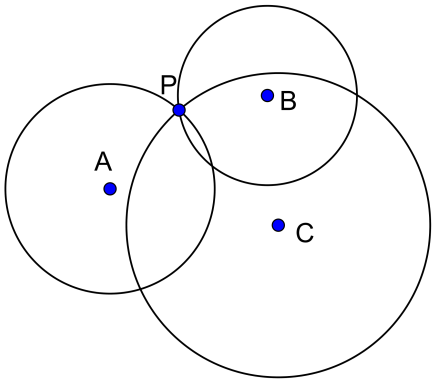
Un concepto importante para el estudio de los movimientos en el plano es el de *punto fijo*.

Definición 2.2. Un punto P de un plano es un punto fijo de un movimiento o isometría M si se cumple $M(P) = P$.

Ejercicio 2.5. *¿Cuáles son los puntos fijos de una traslación? ¿Cuáles son los puntos fijos de una rotación? ¿Cuáles son los puntos fijos de una simetría con respecto a un recta?*

Herramienta básica 1 (HB1). Si M es un movimiento en el plano que tienes tres puntos fijos A, B y C distintos y no alineados, se tiene que M es la identidad.

Demostración. Sea P un punto cualquiera del plano distinto de A, B y C. Como M preserva las distancias, $M(P)$ debe ser un punto de la circunferencia de centro A y radio $|\overline{AP}|$. Análogamente, $M(P)$ debe ser un punto de la circunferencia de centro B y radio $|\overline{BP}|$ y también un punto de la circunferencia de centro C y



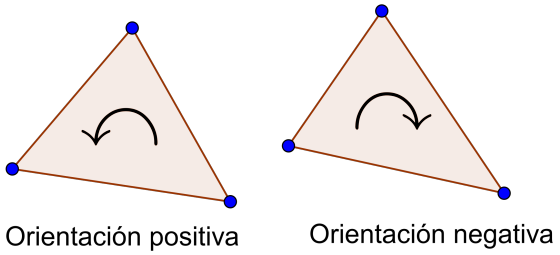
radio $|\overline{CP}|$. Ahora bien, tres circunferencias de centros no alineados solo pueden cortarse en un punto y como P pertenece a todas ellas, se ha de tener $M(P) = P$. ★

Corolario. Si dos movimientos en un plano coinciden en tres puntos no alineados deben ser iguales.

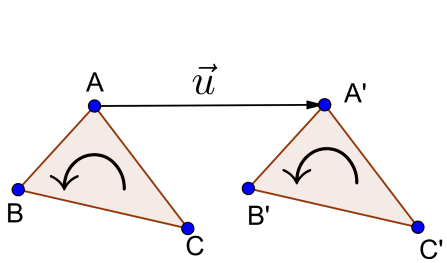
Ejercicio 2.6. *Utilizar el corolario anterior para demostrar que la composición $S_m \circ S_\ell$ de dos simetrías con respecto a las rectas paralelas ℓ y m es una traslación de vector $2\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un vector perpendicular a una cualquiera de las rectas, cuyo módulo es la distancia entre las rectas paralelas y su sentido es el que va de ℓ a m.*

Ejercicio 2.7. *Averiguar con Geogebra cuál puede ser la composición de dos simetrías axiales cuyos ejes de simetría se cortan en un punto. A continuación tratar de demostrar la conjetura usando el Corolario anterior.*

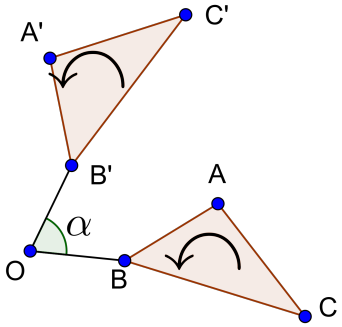
Otro concepto importante para estudiar los movimientos es el de **orientación del borde de las figuras.** Un borde de duna figura se **orienta** indicando un sentido del recorrido del borde. Si este sentido del recorrido es como el contrario al de las agujas de un reloj, se dice que el borde se ha **orientado positivamente**. Si es como el mismo del de las agujas de un reloj, se dice que se ha **orientado negativamente.**



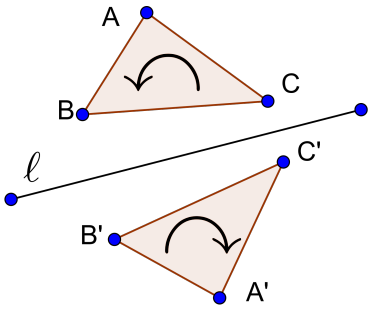
Las traslaciones y las rotaciones conservan las orientación de las figuras. Las simetrías cambian la orientación de las figuras. Esto puede comprobarse en los gráficos siguientes:



Las traslaciones conservan
la orientación de las figuras



Las rotaciones conservan
la orientación de las figurlas

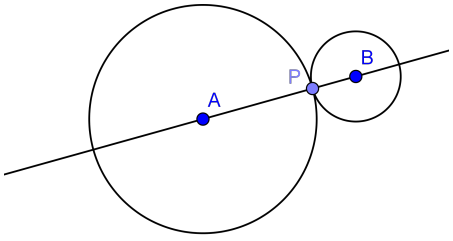


Las simetrías axiales cambian
la orientacíon de las figuras

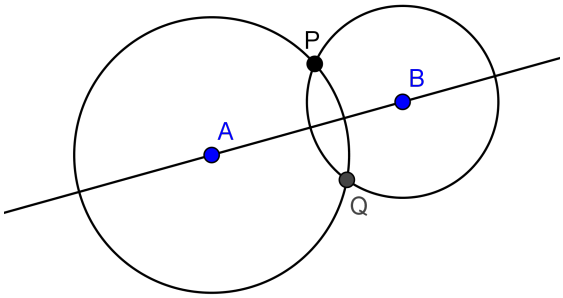
Herramienta básica 2 (HB2). Si un movimiento en el plano tiene al menos dos puntos fijos distintos A y B, o bien es la identidad o bien es una simetría axial con respecto a la recta que pasa por A y B.

Demostración.

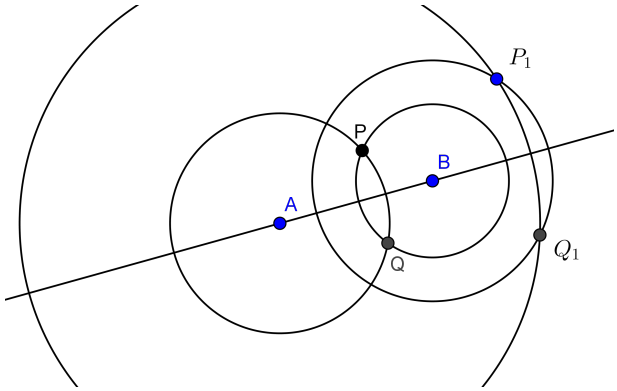
Sean A y B dos puntos fijos y distintos de un movimiento M. Sea ℓ la recta que pasa por A y B. Todos los puntos de la recta ℓ son fijos para este movimiento. En efecto, si $P \in \ell$ este punto debe estar a la vez en



la circunferencia de centro A y radio $|\overline{AP}|$ y en la de centro B y radio $|\overline{BP}|$. Como estas circunferencias se cortan solo en el punto P (ver figura adjunta) se tiene $M(P) = P$.



Sea ahora P un punto que no está en la recta ℓ. Sean P y Q los dos puntos de corte de la circunferencia de centro A y radio $|\overline{AP}|$ y la de centro B y radio $|\overline{BP}|$ (ver figura adjunta). Observar que los puntos P y Q son simétricos respecto a la recta ℓ. Por tanto, o bien $M(P) = P$ o $M(P) = Q$. En el primer caso probaremos que M es la identidad. En el segundo caso probaremos que M es una simetría axial con respecto a la recta ℓ.



Supongamos que $M(P) = P$ y sea P_1 otro punto cualquiera que no esté en la recta ℓ y que sea distinto de P. Por comparación de distancias se tiene $M(P_1) = P_1$ o $M(P_1) = Q_1$ (ver figura de la derecha). Si fuera $M(P_1) = Q_1$ se tendría

$$d(P, P_1) = d(M(P), M(P_1)) = d(P, Q_1).$$

Como P_1 y Q_1 son simétricos respecto a la recta ℓ, la igualdad anterior implica que P es un punto de la recta ℓ, lo que es contrario a nuestra suposición. Luego $M(P_1) = P_1$ y M es la identidad.

Supongamos que $M(P) = Q$. Se tendría que probar que $M(P_1) = Q_1$. Si fuera $M(P_1) = P_1$ se tendría

$$d(Q, P_1) = d(M(P), M(P_1)) = d(P, P_1).$$

Como P y Q son simétricos respecto a la recta ℓ, la igualdad anterior implica que P_1 es un punto de la recta ℓ, lo que es contrario a nuestra suposición. Luego $M(P_1) = Q_1$ y M es una simetría. ★

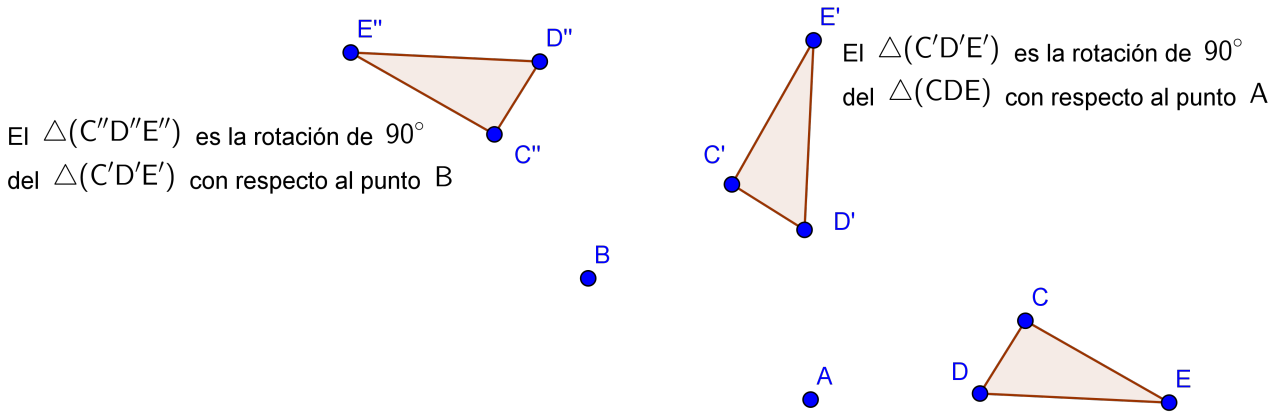
Herramienta básica 3 (HB3).

a) Si un movimiento en el plano tiene al menos dos puntos fijos distintos y no cambia la orientación de las figuras, es el movimiento indentidad.

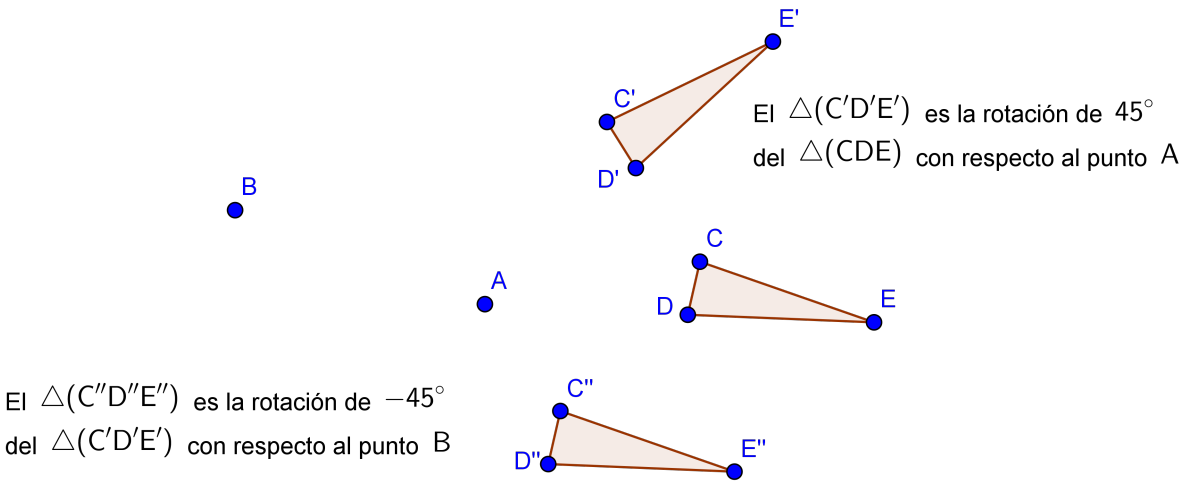
b) Si un movimiento en el plano tiene al menos dos puntos fijos distintos A y B, y cambia la orientación de las figuras, es una simetría axial con respecto a la recta que pasa por A y B.

Demostración. Es un corolario de la Herramienta básica 2 y la observación de la página anterior sobre la conservación de la orientación en las figuras. ★

Ejercicio 2.8. *Comprueba con Geogebra que la composición de dos rotaciones de* $90°$ *en sentido positivo alrededor de dos puntos distintos* A *y* B *es una rotación de* $180°$ *(simetría central) ¿Cuál es el centro de esta simetría?. A continuación tratar de demostrar el resultado comprobado con Geogebra usando la Herramienta 3.*



Ejercicio 2.9. *Comprueba con Geogebra que la composición de dos rotaciones, ambas de ángulo α, una en sentido positivo y otra en sentido negativo, alrededor de dos puntos distintos A y B, es una traslación ¿Cuál es el vector de traslación?. A continuación tratar de demostrar el resultado comprobado con Geogebra usando la Herramienta 3.*

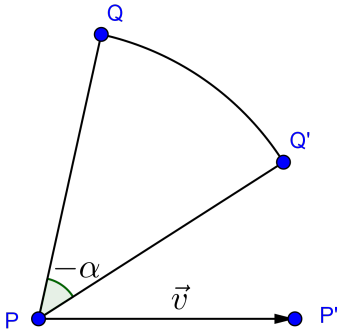


3. Clasificación de los movimientos en el plano.

En esta sección se describen como son todos los movimientos en el plano. Conocemos las traslaciones, las rotaciones y las simetrías con respecto a una recta. ¿Hay alguna más?

Teorema 3.1. Todo movimiento en un plano es:
a) O bien la composición de una rotación y una traslación, $T_{\vec{u}} \circ R_{P,\alpha}$.
b) O bien la composición de una simetría con respecto a una recta ℓ, una rotación y una traslación, $T_{\vec{u}} \circ R_{P,\alpha} \circ S_\ell$. En este caso el centro de rotación está en la recta ℓ.

Nota: El orden en que se componen los movientos en el teorema 3.1 es muy importante.



Demostración. Sea M un movimiento y sea P un punto cualquiera del plano. Sea $P' = M(P)$. Llamemos $\vec{v} = \overline{PP'}$. El movimiento $T_{-\vec{v}}$ deja fijo el punto P. En efecto:

$$T_{-\vec{v}} \circ M(P) = T_{-\vec{v}}(P') = P' - \vec{v} = P\,.$$

Sea Q otro punto del plano, distinto de P, y sea $Q' = T_{-\vec{v}} \circ M(Q)$. Como $T_{-\vec{v}} \circ M$ es un movimiento, $d(P,Q) = d(P,Q')$ y existe una rotación de centro P y ángulo $-\alpha$, $R_{P,-\alpha}$, tal que $R_{P,-\alpha}(Q') = Q$.

El movimiento $R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}} \circ M$ tiene P y Q como puntos fijos. En efecto:

$$R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}} \circ M(P) = R_{P,-\alpha}(P) = P\,,$$

$$R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}} \circ M(Q) = R_{P,-\alpha}(Q') = Q\,.$$

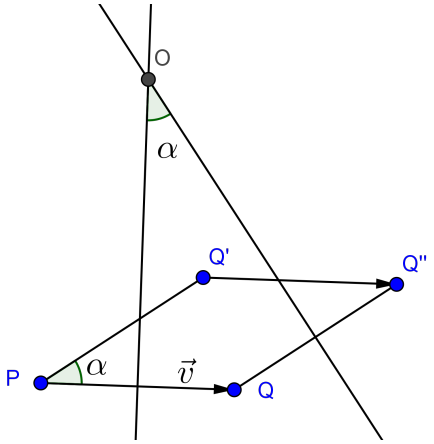
Por la herramienta básica 1, o bien $R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}} \circ M = I$ o bien $R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}} \circ M = S_\ell$, donde ℓ es una recta que pasa por el punto P. Como el movimiento inverso de $T_{-\vec{v}}$ es $T_{\vec{v}}$ y el de $R_{P,-\alpha}$ es $R_{P,\alpha}$ se tiene

$$M = T_{\vec{v}} \circ R_{P,\alpha} \qquad \text{o} \qquad M = T_{\vec{v}} \circ R_{P,\alpha} \circ S_\ell\,.$$

★

A la vista del resultado probado en el teorema 3.1, debemos estudiar, en primer, lugar la composición de una rotación y una traslación, en el orden indicado en el teorema.

Proposición 3.2. La composición de una rotación $R_{P,\alpha}$ y una traslación $T_{\vec{v}}$, es decir $T_{\vec{v}} \circ R_{P,\alpha}$ es una rotación del mismo angulo α.



Demostración. Sean

$$Q = T_{\vec{v}}(P), \qquad Q' = R_{P,\alpha}(Q) \qquad \text{y} \qquad Q'' = T_{\vec{v}}(Q')\,.$$

Considerar las mediatrices de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QQ''}$. Supongamos, primero, que ambas se cortan en un punto O (observar que el ángulo que forman estas mediatrices en O es α). En este caso, se probará que $T_{\vec{v}} \circ R_{P,\alpha} = R_{O,\alpha}$.

Para demostrarlo consideremos el movimiento $R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}} \circ R_{O,\alpha}$. Este movimiento tiene P y Q como puntos fijos. En efecto:

$$R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}} \circ R_{O,\alpha}(P) = R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}}(Q) = R_{P,-\alpha}(P) = P\,,$$

$$R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}} \circ R_{O,\alpha}(Q) = R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}}(Q'') = R_{P,-\alpha}(Q') = Q\,.$$

Como las rotaciones y las traslaciones preservan la orientación, también lo hace el movimiento que estamos considerando. Por la herramienta básica 3, se ha de tener $R_{P,-\alpha} \circ T_{-\vec{v}} \circ R_{O,\alpha} = I$. Como el inverso de $T_{-\vec{v}}$ es $T_{\vec{v}}$ y el de $R_{P,-\alpha}$ es $R_{P,\alpha}$ se tiene

$$R_{O,\alpha} = T_{\vec{v}} \circ R_{P,\alpha}.$$

Si las mediatrices de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QQ''}$ no se cortaran, se debe a que $\alpha = 180°$. Probar que en este caso, basta tomar el centro de la rotación O como el punto medio del segmento $\overline{PQ}$. ★

Ahora tenemos que estudiar el movimiento del apartado b) del teorema 3.1. Comenzaremos con la composición de una simetría y una rotación, donde el centro de rotación pertenece al centro de simetría.

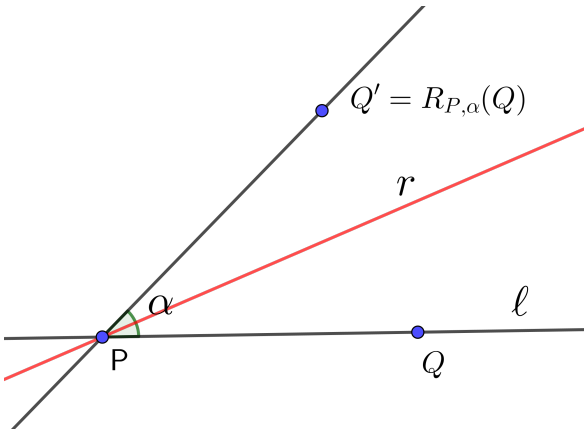
Proposición 3.3. La composición de una simetría axial S_ℓ y una rotación $R_{P,\alpha}$, es decir $R_{P,\alpha} \circ S_\ell$, es una simetría axial S_r, donde r es la bisectriz de las rectas ℓ y $R_{P,\alpha}(\ell)$.

Demostración. Sea Q un punto de la recta ℓ distinto de P, y sea $Q' = R_{P,\alpha}(Q)$. El movimiento $S_\ell \circ R_{P,-\alpha} \circ S_r$ tiene a P y Q como puntos fijos. En efecto:

$$S_\ell \circ R_{P,-\alpha} \circ S_r(P) = S_\ell \circ R_{P,-\alpha}(P) = S_\ell(P) = P\,,$$

$$S_\ell \circ R_{P,-\alpha} \circ S_r(Q) = S_\ell \circ R_{P,-\alpha}(Q') = S_\ell(Q) = Q\,.$$

Este movimiento no cambia la orientación, ya dos simetrías axiales anulan el cambio de orientación que produce cada una de ellas. Por la herramienta básica 3, este movimiento es la identidad. Por tanto,



$$S_\ell \circ R_{P,-\alpha} \circ S_r = I\,.$$

Como el inverso de una simetría axial es ella misma y el inverso de $R_{P,-\alpha}$ es $R_{P,\alpha}$, se tiene

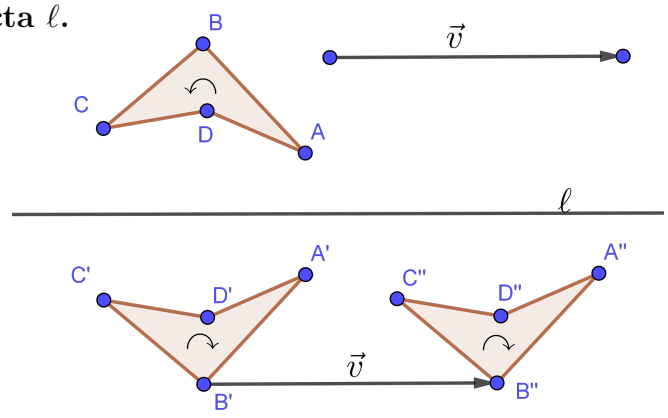
$$R_{P,\alpha} \circ S_\ell = S_r\,,$$

que se lo se queria demostrar. ★

Finalmente, necesitamos estudiar cuál es la composición de una simetría axial S_ℓ y una traslación $T_{\vec{v}}$, es decir $T_{\vec{v}} \circ S_\ell$.

• **Caso 1: el vector $\vec{v}$ es paralelo a la recta ℓ.**

Como puede verse en la figura adjunta, $T_{\vec{v}} \circ S_\ell$ es un movimiento que cambia la orientación, pero no es una simetría axial. Es un nuevo movimiento en el plano que se llama **simetría deslizante** con respecto a la recta ℓ con vector $\vec{v}$ y se escribe $S_{r,\vec{v}}$ Las pisadas dejadas sobre la nieve por las botas de un caminante es un ejemplo de simetría deslizante.



• **Caso 2: el vector $\vec{u}$ es perpendicular a la recta ℓ.**

Ejercicio 3.1. *Comprueba con Geogebra que en el caso que nos ocupa, la composición $T_{\vec{u}} \circ S_\ell$ es una simetría axial con respecto a la recta r que es la traslación de la recta ℓ con vector de traslación $\frac{1}{2}\vec{u}$.*

• **Caso 3: el vector $\vec{w}$ y la recta ℓ pueden ser cualesquiera.**

Ejercicio 2.9. *Escribir $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ con $\vec{v}$ paralelo a la recta ℓ y $\vec{u}$ perpendicular a la misma recta. Prueba que $T_{\vec{w}} \circ S_\ell$ es una simetría axial si $\vec{v} = \vec{0}$ o una simetría deslizante cuando $\vec{v} \neq \vec{0}$.*

Estudiados todos los casos posible solo ha aparecido un nuevo movimiento, que hemos llamado *simetría deslizante* y que cambia las orientación del borde de las figuras. Así que hemos justificado el resultado que se enucia a continuación.

Teorema 3.2 (Clasificación de los movimientos en el palno)
a) Si un movimiento en el plano **no cambia la orientación**, o bien es la **identidad**, o una **traslación** o una **rotación**.
b) Si un movimiento en el plano **cambia la orientación**, o bien es una **simetría axial** o una **simetria deslizante**.

4. Algunos problemas para resolver con simetrías.

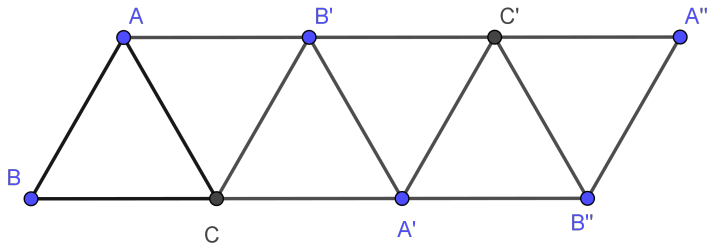
4.1. Triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triángulo acutángulo.

En esta sección vamos a usar simetrías axiales para conjeturar cuál es el triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triángulo acutángulo.

Ejercicio 4.1. *Dibujar un triángulo equilátero y sus alturas. Forma el triángulo que se obtiene en su interior uniendo los pies de sus alturas. ¿Cual es el perímetro de este nuevo triángulo si el triángulo equilátero original tiene 10 metros de perímetro?*

Ejercicio 4.2. *Midiento con Geogebra, comprobar que cualquier otro triángulo inscrito en el triángulo equilátero tiene perímetro mayor que el perímetro del que se obtiene uniendo los pies de sus alturas.*

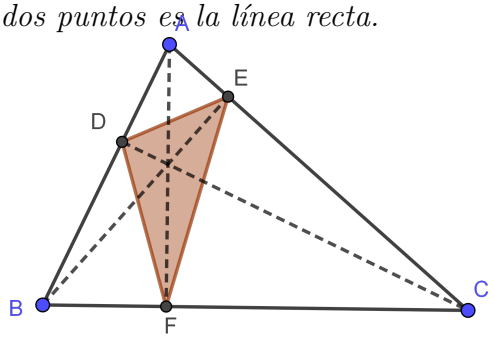
Ejercicio 4.3. *a) Dibujar un triángulo equilátero y sus simétricos, como en la figura que sigue. Observar que el segmento $\overline{A''B''}$ es un trasladado del segmento $\overline{AB}$.*



b) Haciendo simetrías de cualquier triángulo inscrito en el triángulo $\triangle(ABC)$, comprobar que el trángulo formado por los pies de sus alturas (los puntos medios de los lados en este caso) es el que tiene menor perímetro, usando que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta.

Definición 4.1. Dado un triángulo acutángulo cualquiera, su **triángulo órtico** es el que se forma uniendo los pies de cada una de sus alturas.

En la figura de la derecha, el triángulo $\triangle(DEF)$ es el triángulo órtico del triángulo acutángulo $\triangle(ABC)$.

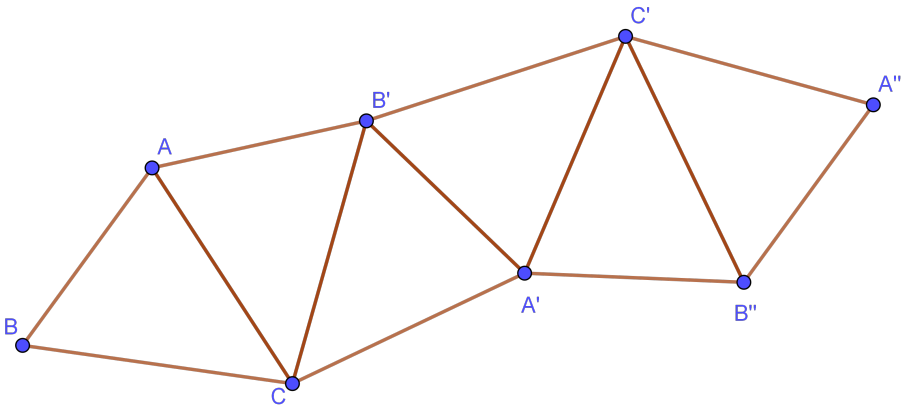


Ejercicio 4.4. *Dibujar con Geogebra un triángulo acutángulo y sus alturas. Formar su triángulo órtico. ¿Cual es el perímetro del triángulo órtico si el triángulo acutángulo original tiene 10 metros de perímetro?*

Ejercicio 4.5. *Midiento con Geogebra, comprobar que cualquier otro triángulo inscrito en un triángulo acutángulo tiene perímetro mayor que el perímetro del tríangulo órtico.*

Ejercicio 4.5. *(Se pide hacer lo mismo que en el ejercicio 4.3 para cualquier triángulo acutángulo)*

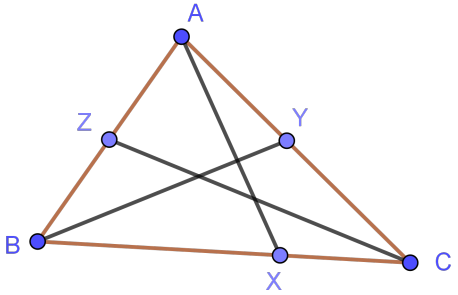
a) Dibujar un triángulo acutánqulo cualquiera y sus simétricos, como en la figura que sigue. Observar que el segmento $\overline{A''B''}$ es un trasladado del segmento $\overline{AB}$.



b) Haciendo simetrías de cualquier triángulo inscrito en el triángulo $\triangle(ABC)$, comprobar que el órtico es el que tiene menor perímetro, usando que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta.

4.2. Áreas de triángulos formados por cevianas

Definición 4.2. Dado un triángulo cualquiera, una **ceviana** es una recta que une un vértice con cualquier punto del lado opuesto.



Nota: Un triángulo tiene infinitas cevianas. En el triángulo de la derecha se ha dibujado una por cada uno de los vértices.

Información: Los más probable es que tres cevianas, una por cada uno de los vértices de un triángulo, no se corten en un punto, sino que formen un triángulo, como en la figura.

En 1678, **Giovanni Ceva** demostró que si tres cevianas $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CZ}$, una por cada vértice de un triángulo $\triangle(ABC)$ se cortan en un punto, entonces

$$\frac{|\overline{BX}|}{|\overline{XC}|} \cdot \frac{|\overline{CY}|}{|\overline{YA}|} \cdot \frac{|\overline{AZ}|}{|\overline{ZB}|} = 1\,. \tag{1}$$

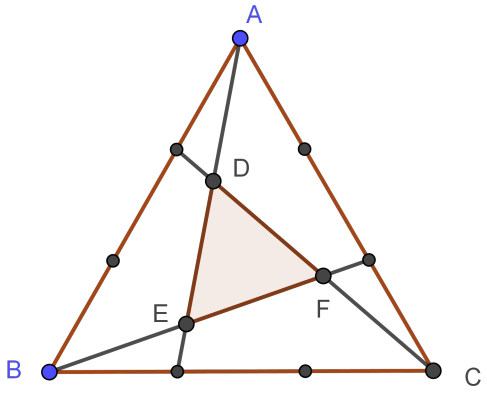
El recíproco también se cumple, es decir, si la relación (1) se cumple, las tres cevianas $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CZ}$ se cortan en un punto. La demostración de estos resultados solo requiere técnicas elementales. Con este resultado puede probarse sin dificultad lo siguiente:

- Las **mediatrices** de los lados de un triángulo se cortan en un punto (el **circuncentro**)
- Las **medianas** de un triángulo se cortan en un punto (el **baricentro** o **centro de gravedad** del triángulo).
- Las **alturas** de un triángulo se cortan en un punto (el **ortocentro**.)

Es un ejercicio clásico con Geogebra comprobar que el ortocentro, el circuncentro y el baricentro están alineados. La recta que los contiene se llama **recta de Euler**.

Ejercicio 4.6. *En un triángulo equilátero* $\triangle(ABC)$ *dibujar tres cevianas que dividan a cada uno de los lados en la proporción* $1:2$. *En su interior se forma un triángulo equilátero* $\triangle(DEB)$ *como en el figura adjunta. Hallar la razón entre las áreas de estos triángulos, es decir, calcular el cociente*

$$\frac{|\triangle(DEB)|}{|\triangle(ABC)|}.$$

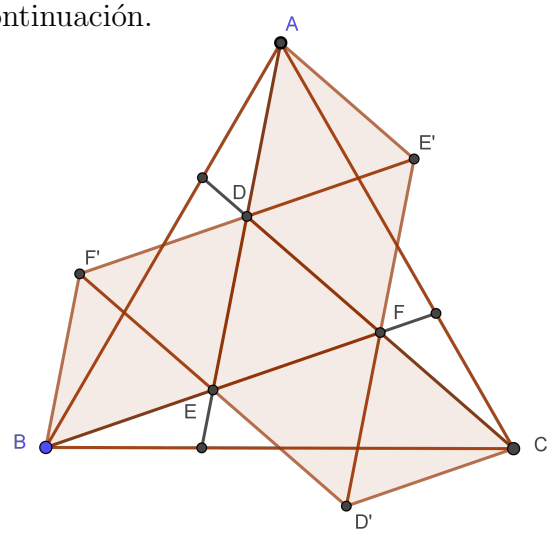


Este ejercicio puede resolverse usando semejanza de triángulos, el teorema de Thales de Mileto y el teorema de Pitágoras. Pero habiendo estudiado las simetrías vamos a usar Geogebra para hallar su solución. Realizar las construcción que se detalla a continuación.

- Comenzar dibujando las cevianas como en la figura del ejercicio 4.6, para dibujar el triángulo interior $\triangle(DEF)$.

- Hallar el simétrico de E con respecto a la recta $\overline{DF}$. Se obtiene el punto E'. Dibujar el triángulo $\triangle(DE'A)$.

- Repetir este procedimiento con los otros dos vértices del triángulo interior usando los otros dos lados del triángulo $\triangle(DEF)$.



El resultado final debe ser como la figura que se muestra a la derecha de la construcción. **¡Ahora es muy fácil responder a la pregunta del ejercicio 4.6!**

Información adicional: El ejercicio 5.1 se puede generalizar haciendo que las cevianas dividan al lado opuesto en la razón $1:k$. El caso $k=3$ se puede hacer con Geogebra, y con más paciencia el caso $k=4$. En general, el cálculo hay que hacerlo usando los teoremas de Thales y de Pitágonras. El cociente de las áreas del triángulo interior y el original es

$$\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}.$$

Eugenio Hernández
Universidad Autónoma de Madrid
Noviembre, 2107