Introducción a modelos matemáticos aplicados a finanzas cuantitativas

Clase 3:
Opciones americanas. La fórmula de Black-Scholes

Patricia Kisbye

12, 14 y 15 de diciembre de 2017

Encuentro de Estudiantes - UMA - RSME

Valoración de opciones americanas

Opción americana

En una **opción americana**, el tenedor tiene derecho a ejercer la opción en cualquier momento previo a la madurez del contrato.

El valor de la opción americana en cada tiempo t es el máximo entre estas dos alternativas:

- **Ejercer**: valor intrínseco de la opción.
- **Esperar**: valor esperado descontado.

Ejemplo

Opción put americana

Valorar una opción put americana con strike 100 con madurez en tres períodos, sobre un activo con precio inicial $S_0 = 100$, y parámetros $u = 1.1$, $d = 0.9$.
La tasa periódica libre de riesgo es del 5 %.

Árbol binomial

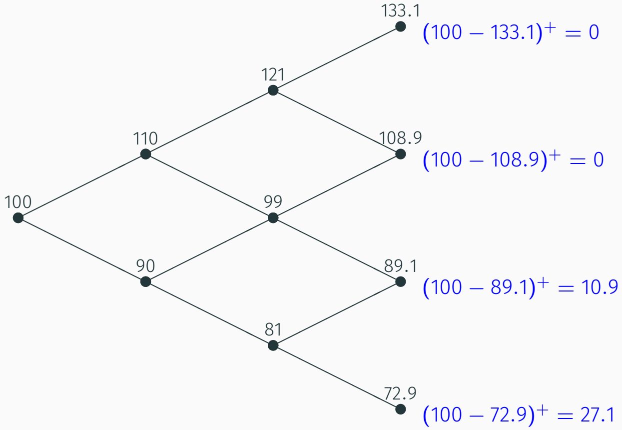


Figura 1: Árbol de la acción y Payoff

Árbol binomial

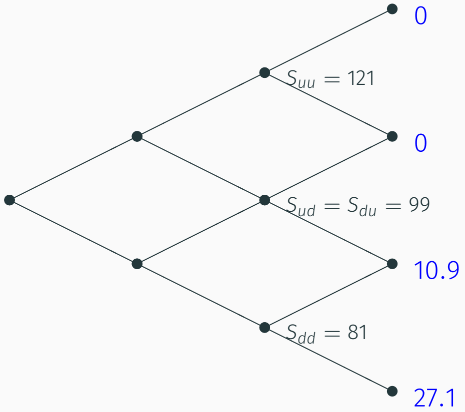


Figura 2: Payoff en $t = 3$ de la opción put con $K = 100$

Valoración de put europea

En $t = 2$ elegimos el máximo valor entre ejercer y esperar:

- Si sale CX o XC conviene esperar:

$$V_{ud} = V_{du} = \text{máx}\{100-99, \frac{1}{1.05}((0.75) \cdot 0 + (0.25) \cdot 10.9)\} = 2.595.$$

- Si sale XX conviene ejercer:

$$V_{ud} = \text{máx}\{100 - 81, \frac{1}{1.05}((0.75) \cdot 0 + (0.25) \cdot 27.15)\} = 19$$

- Si sale CC en cualquier caso da 0:

$$V_{uu} = 0$$

En $t = 2$

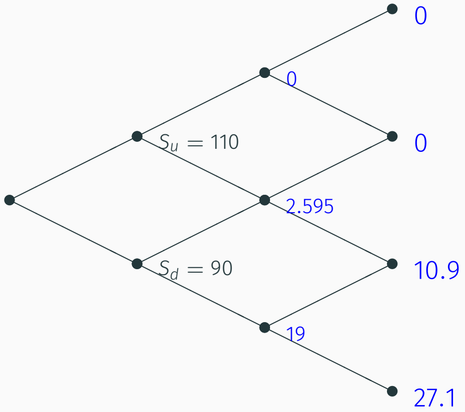


Figura 3: Valores de la put desde $t = 2$

En $t = 1$ y $t = 0$

- Valoramos en $t = 1$:

$$
\begin{aligned}
V_u &= \text{máx}(100 - 110, \quad \frac{1}{1.05}(0.75 \cdot 0 + 0.25 \cdot 2.595) = 0.617 \\
V_d &= \text{máx}(100 - 90, \quad \frac{1}{1.05}(0.75 \cdot 2.595 + 0.25 \cdot 19) = 10.
\end{aligned}
$$

- Y en $t = 0$:

$$
V_0 = \text{máx}\{100 - 100, \quad \frac{1}{1.05}(0.75 \cdot 0.617 + 0.25 \cdot 10) = 2.822
$$

En $t = 1$ y $t = 0$

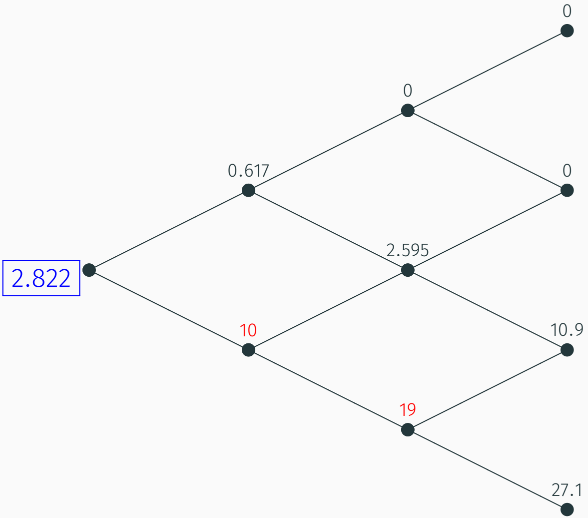


Figura 4: Árbol completo de la put

Observaciones

- El valor de un derivado americano es mayor o igual al equivalente europeo.

$$\text{prima}_{americana} \geq \text{prima}_{europea}$$

- En el Ejemplo:

$$\begin{aligned} p_{europea} &= \frac{1}{(1,05)^3}(3pq^2 \cdot 10.9 + q^3 \cdot 27.1) = 1.6899 \\ p_{americana} &= 2.822. \end{aligned}$$

- En una call americana nunca conviene el ejercicio temprano.

$$V_{call\ americana} = V_{call\ europea}.$$

- Para las opciones americanas no es válida la paridad put-call.

El modelo continuo: Black-Scholes

Un poco de historia

Fórmula de Black-Scholes para valoración de opciones

- Fisher Black, Myron Scholes: ”The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, Journal of Political Economy. (1973)
- Robert Merton: ”Theory of Rational Option Pricing”, The Bell Journal of Economics and Management Science. (1973).
- M. Scholes y R. Merton: Premio Nobel de Economía. (1997)

El movimiento Browniano

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

Movimiento browniano

Un MB con **tendencia** μ y **volatilidad** σ es un proceso estocástico continuo $\{W(t),\ t \geq 0\}$ que satisface las siguientes propiedades:

- $W(0) = 0$, y
- si $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, entonces

$$W(t_1) = W(t_1) - W(0), \qquad W(t_2) - W(t_1), \qquad \ldots \qquad W(t_n) - W(t_{n-1}),$$

son variables aleatorias independientes, normales, con

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W(t_i) - W(t_{i-1}) &= \mu \cdot (t_i - t_{i-1}), \\ \mathrm{Var}(W(t_i) - W(t_{i-1})) &= \sigma^2 \cdot (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Movimiento browniano

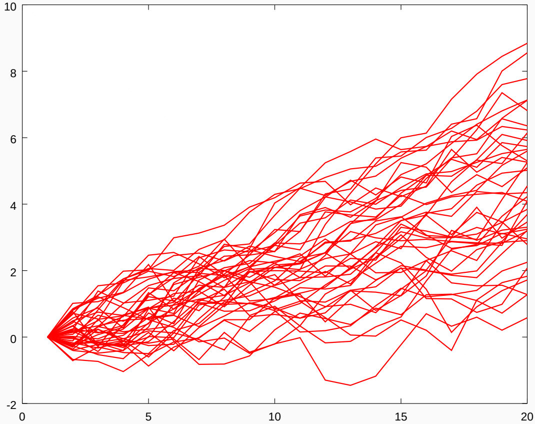


Figura 5: Movimiento browniano con $\mu = 0.3$, $\sigma = 0.5$

Movimiento geométrico browniano

Movimiento Geométrico Browniano

Un **MGB** con **tendencia** μ y **volatilidad** σ es un proceso estocástico continuo $\{S(t),\ t \geq 0\}$ tal que

$$\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$$

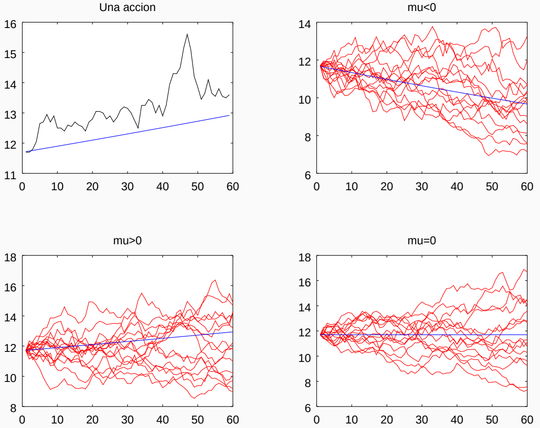
es un movimiento browniano con tendencia $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y volatilidad σ.

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}$$

$$E[S(t)] = S(0)e^{\mu \cdot t}.$$

y esa es la razón por la cual μ se denomina tendencia.

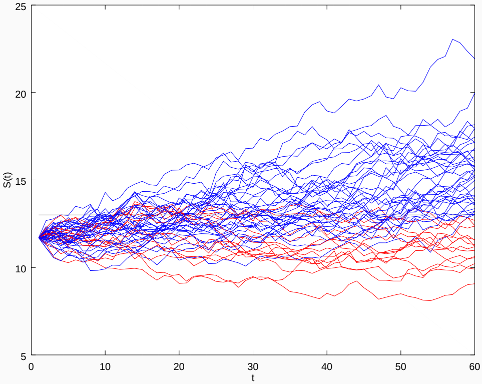
El modelo de Black-Scholes



$$S(t) = S(0)e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W(t)} \qquad E[S(t)] = S(0)\,e^{\mu\,t}$$

El payoff

$$\boxed{\text{Payoff} = (S(T) - K)^+}$$



Payoff$= S(T) - K$

Payoff$= 0$

El modelo

Hipótesis:

- El precio del activo sigue un movimiento geométrico browniano

$$S(t) = S(0) \cdot e^{(\mu - \sigma^2/2) + \sigma W(t)} \qquad W(t) \sim N(0, \sqrt{t}).$$

- La cuenta de moneda evoluciona a una tasa r:

$$B(t) = B(0)e^{rt}$$

- Payoff de la opción call:

$$V(T) = (S(T) - K)^+$$

- Objetivo: Determinar $V(0)$.

El modelo de Black-Scholes como límite del modelo binomial

Capitalización continua

Tasa nominal anual

Una tasa de interés nominal anual del 6 % con capitalización mensual significa que la tasa mensual es:

$$i = \frac{0.06}{12}$$

$$B(1\text{ mes}) = B(0)\cdot\left(1+\frac{0.06}{12}\right), \qquad B(3\text{ meses}) = B(0)\cdot\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^3$$

- r: una tasa de interés nominal.
- Dividimos el año en n intervalos de tiempo: $t = \frac{m}{n}$.

$$B(t) \quad = \quad B(0)\left(1+\frac{r}{n}\right)^m = B(0)\,\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\frac{m}{n}}$$

$$\boxed{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\frac{m}{n}} \mapsto e^{rt}.}$$

El modelo binomial

- t: un tiempo.
- Dividimos $[0, t]$ en n intervalos:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t, \qquad t_k = k \cdot \frac{t}{n}.$$

- $\sigma > 0$: volatilidad del activo.
- La acción: $S(0) = S_0$, y tal que:

$$S(t_{i+1}) = \begin{cases} S(t_i)\, e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} & \text{si la } i\text{-ésima moneda es cara} \\ S(t_i)\, e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} & \text{si la } i\text{-ésima moneda es cruz.} \end{cases}$$

- Valores de u y d.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} = \frac{1}{u}.$$

Probabilidades de riesgo neutral

- r: La tasa nominal libre de riesgo.
- Tasa libre de riesgo en un período:

$$1 + i = e^{r\frac{t}{n}}.$$

- Probabilidad de riesgo neutral:

$$p_n = \frac{e^{r\frac{t}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}, \qquad q_n = 1 - p_n.$$

Probabilidades neutral al riesgo

$$
\begin{aligned}
e^{r\frac{t}{n}} &\simeq 1 + r\frac{t}{n} \\
e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} &\simeq 1 + \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\frac{t}{n}, \\
e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} &\simeq 1 - \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\frac{t}{n}.
\end{aligned}
$$

Probabilidad neutral al riesgo

Para n suficientemente grande:

$$
p_n \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right).
$$

$$
q_n \sim \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right).
$$

Construcción del Movimiento browniano

- Para $t = t_k = k\frac{t}{n}$:

$$S(t) = S(t_k) = S_0\, e^{(X_1+X_2+\cdots+X_k)},$$

donde

$$X_j = \begin{cases} \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} & \text{si } \omega_j = C \qquad \text{(la j-ésima tirada es cara)}, \\ -\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} & \text{si } \omega_j = X \qquad \text{(la j-ésima tirada es cruz)}, \end{cases}$$

- Se puede ver que

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

tiende a un movimiento browniano.

El MB como límite del M. Binomial

- Las variables X_i son independientes e igualmente distribuidas.

$$E[X_i] = (2\,p_n - 1)\,\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} = (r - \frac{\sigma^2}{2})\,\frac{t}{n}, \qquad Var[X_i] = \sigma^2\,\frac{t}{n}.$$

- Para k grande,

$$W^{(n)}(t_k) = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

  tiene distribución aproximadamente normal.
- Los incrementos son independientes, normalmente distribuidos:

$$W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j) = X_{j+1} + \cdots + X_k$$

$$\begin{aligned} E[W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j)] &= (r - \frac{\sigma^2}{2})\,(t_k - t_j) \\ Var[W^{(n)}(t_k) - W^{(n)}(t_j)] &= \sigma^2\,(t_k - t_j). \end{aligned}$$

El MB como límite del M. Binomial

Límite del modelo binomial

Bajo la probabilidad neutral al riesgo, la caminata aleatoria

$$W^{(n)}(t_k) = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

tiende a un movimiento browniano con tendencia $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ y volatilidad σ.

$$S(t_k) = S(0) \cdot e^{X_1+X_2+\cdots+X_k} = S(0) \cdot e^{W^{(n)}(t_k)}.$$

Valoración de una opción call

- El payoff de una call europea con strike K y madurez T es:

$$(S(T) - K)^+.$$

- En el modelo binomial tenemos que

$$V_{call} = \frac{1}{e^{rT}} \cdot E\left[(S(T) - K)^+\right].$$

- En el límite,

$$S(T) = e^{W(T)},$$

  donde

$$W(T) \sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma\sqrt{T}\right).$$

Cálculos

- Densidad f de $W(T)$:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(r-\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2}.$$

- A resolver:

$$V_{call} = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(S(0)e^y - K)^+ \cdot f(y)\, dy.$$

Cálculos

$$e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(S(0)e^{y}-K)^{+}\cdot f(y)\,dy$$

- El integrando es 0 si

$$y<\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right).$$

- La integral se separa en dos términos.

$$\underbrace{\int_{\ln\frac{K}{S(0)}}^{\infty} S(0)\cdot e^{-rT}\,e^{y}\cdot f(y)\,dy}_{A}-\underbrace{Ke^{-rT}\int_{\ln\frac{K}{S(0)}}^{\infty} f(y)\,dy}_{B}.$$

Primer término

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln\frac{K}{S(0)}}^{\infty} S(0) \cdot e^{-rT} e^{y} \cdot e^{-\frac{(y-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}} \, dy$$

$$\exp\left(-rT + y - \frac{(y-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}\right) = \exp\left(-\frac{(y-(r+\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Con el cambio de variables:

$$A = S(0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{U}^{\infty} e^{-x^2/2} \, dx$$

$$U = \frac{\ln\frac{K}{S(0)} - (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = -\frac{\ln\frac{S(0)}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Segundo término

$$B = Ke^{-rT}\int_{\ln\frac{K}{S(0)}}^{\infty} f(y)\,dy = Ke^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\int_{\ln\frac{K}{S(0)}}^{\infty} e^{-\frac{(y-(r-\frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}}\,dy$$

Con un cambio de variables:

$$B = Ke^{-rT}\int_{V}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$V = -\frac{\ln\frac{S(0)}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = U - \sigma\sqrt{T}.$$

Cálculos

- Φ: función de distribución acumulada de $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx,$$

- Usamos que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \Phi(-a)$$

Fórmula de Black-Scholes

Sea c la prima de una opción call europea, con strike K y madurez T, sobre un activo cuyo precio sigue un movimiento geométrico browniano con volatilidad σ. Sea r la tasa libre de riesgo. Entonces, bajo una hipótesis de no arbitraje se cumple que:

$$V_{call} = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S(0)}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Importancia de la fórmula de Black-Scholes

- Las opciones call cotizan en el mercado: Ya se conoce su prima.
- La fórmula tiene como parámetro a la volatilidad σ del activo.
- Se denomina volatilidad implícita del activo.
- A partir de la fórmula de Black-Scholes, observando la prima en el mercado:

Obtenemos la volatilidad implícita

- Ahora podemos valorar otros productos que no cotizan en el mercado.

Derivados exóticos

Bibliografía

- Steven E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model.* (2005) - Edit. Springer.
- John C. Hull, *Options, futures and other derivatives* , Prentice Hall finance series.

¿Para qué sirve saber estos temas?

CRISIL Argentina

- Equipo de desarrollo y testing como de los de validación de **modelos de modelos de valuación de derivados financieros**.
- Grupos conformados por graduados en carreras de doctorado en **Matemática**, Física o carreras afines.
- Diseño y la ejecución de un diversa cantidad de tests sobre **modelos de valuación de derivados exóticos** (consistencia, convergencia, estabilidad, sensibilidad y stress (CCAR) entre otros), así como también desarrollar la documentación pertinente de los mismos para uno de los más grandes bancos de los Estados Unidos.
- **Conocimientos requeridos:** Programación, Calculo Estocástico, Estadística, Finanzas Cuanttativas, Ecuaciones Diferenciales, Optimizacion Numérica
- **Bibliografía recomendada**: Shreve, S. Stochastic Calculus for Finance, Volume II: Continuous-Time Models.

Muchas gracias

☺

espero hayan disfrutado el curso,

Patricia.