RSME-UMA 2017
BUENOS AIRES
11-15 DICIEMBRE 2017

Introducción a modelos matemáticos aplicados a finanzas cuantitativas

Clase 2: Valoración de derivados

Patricia Kisbye

12, 14 y 15 de diciembre de 2017

Encuentro de Estudiantes - UMA - RSME

Esperanza condicional y martingalas

Filtración

Filtración M_k

Ω: Resultado de n tiradas de moneda.
M_k es la familia de subconjuntos de Ω generada por la información hasta tiempo k.

Ejemplo: $n = 3$

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \\
M_1 &= \{\{CCC,\ CCX,\ CXC,\ CXX\},\ \{XCC,\ XCX,\ XXC,\ XXX\},\ \emptyset, \Omega\} \\
M_2 &= \{\{CCC,\ CCX\},\ \{CXC,\ CXX\},\ \{XCC,\ XCX\},\ \{XXC,\ XXX\}\} \\
&\quad \text{y todos los complementos y uniones}\} \\
M_3 &= \mathcal{P}(\Omega)
\end{aligned}
$$

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots M_k \ldots$$

Esperanza condicional

- $\mathcal{M} = \{M_k \mid k = 0 \dots n\}$: filtración.
- M_k tiene la información suficiente para S_k.
- S_k es un proceso adaptado a la filtración $\mathcal{M}$.

Esperanza condicional

Si $\{X_k\}$ es un proceso adaptado, entonces el valor esperado de X_{k+1} condicional a M_k se define como:

$$\tilde{E}[X_{k+1} \mid M_k](\omega_1 \dots \omega_k) := \tilde{p} \cdot X_{k+1}(\omega_1 \dots \omega_k C) + \tilde{q} \cdot X_{k+1}(\omega_1 \dots \omega_k X).$$

- E denota el valor esperado para las probabilidades $(\tilde{p}, \tilde{q})$.
- Notación (abreviada): $E[X_{k+1} \mid M_k]$.
- Se define en general $E[X_m \mid M_k]$, para $k \leq m$.

Esperanza condicional

- La definición se extiende a una variable aleatoria X que depende de las primeras n tiradas.

Propiedades

- $E[X \mid M_0] = E[X]$
- Aditividad:

$$E[X + Y \mid M_k] = E[X \mid M_k] + E[Y \mid M_k].$$

- Si Y depende sólo de las primera k tiradas, y $k < n$, entonces

$$E[YX \mid M_k] = Y\,E[X_n \mid M_k].$$

- Condicionamiento iterado: Para $j < k < n$,

$$E[E[X \mid M_k] \mid M_j] = E[X \mid M_j],$$

Martingala

Un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathcal{M}$ se dice una **martingala** si se cumple que para todo $k \geq 0$,

$$E[X_{k+1} \mid M_k] = X_k.$$

Si $\{X_k\}$ es una martingala, entonces para todo $k \geq 0$ se cumple que el valor esperado de X_k se mantiene constante e igual a X_0:

$$E[X_k] = X_0.$$

Procesos descontados y Martingalas

Propiedad de martingala

En el modelo binomial y bajo la probabilidad neutral al riesgo, los procesos descontados

$$\frac{S_k}{(1+i)^k} \qquad \frac{B(k)}{(1+i)^k} = 1$$

son martingalas.

$\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_k$.

$$\begin{aligned} E[S_{k+1} \mid M_k](\omega) &= p \cdot S_{k+1}(\omega C) + q \cdot S_{k+1}(\omega X) = S_k(\omega) \cdot (p \cdot u + q \cdot d) \\ &= S_k(\omega) \cdot (1+i). \end{aligned}$$

$$\boxed{E\left[\frac{S_{k+1}}{(1+i)^{k+1}} \mid M_k\right] = \frac{S_k}{(1+i)^k}} \qquad \boxed{E\left[\frac{S_k}{(1+i)^k}\right] = S_0.}$$

El modelo binomial de dos pasos

Valoración de una opción call europea

Ejemplo

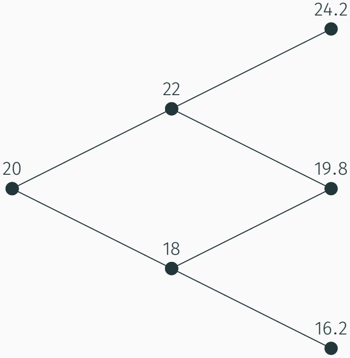
Una acción cuesta hoy \$20 y se sabe que cada tres meses se incrementa en un 10 % o disminuye en un 10 %. La tasa de interés libre de riesgo en cada período trimestral es del 2.5 %.

Valorar una opción call sobre este activo, con strike $K = \$21$ y madurez de 6 meses.

- S_0=20.
- $u = 1.1, \quad d = 0.9.$
- $i = 0.025.$
- Payoff:

$$(S_2 - 21)^+.$$

Árbol binomial



$$(24.2 - 21)^{+} = 3.2$$

$$(10.8 - 21)^{+} = 0$$

$$(16.2 - 21)^{+} = 0$$

Figura 1: Árbol de la acción y payoff de la opción

Payoff=$(S_2 - 21)^{+}$

Portfolio replicante

- Construimos un portfolio replicante: X_0, X_1, X_2.

$$X_0 = \Delta \cdot S_0 + (X_0 - \Delta \cdot S_0) \cdot B(0).$$

- Igualamos X_2 al payoff de la opción.
- X_0: valor de la opción.

- Δ: posición en acciones. No se mantiene constante.
- En $t = 1$: se rebalancea la posición en acciones y dinero, sin modificar el valor del portfolio.

Portfolio replicante

- $t = 0$:

$$X_0 = \underbrace{\Delta_0 \cdot S_0}_{\Delta_0 \text{ acciones}} + \underbrace{(X_0 - \Delta_0 \cdot S_0) \cdot 1}_{\text{dinero}}.$$

- $t = 1$:

$$X_1 = \Delta_0 \cdot S_1 + (X_0 - \Delta_0 \cdot S_0) \cdot (1 + i).$$

Manteniendo el valor de X_1:

$$X_1 = \underbrace{\Delta_1 \cdot S_1}_{\Delta_1 \text{ acciones}} + \underbrace{(X_1 - \Delta_1 \cdot S_1)}_{\text{dinero}}.$$

- $t = 2$:

$$X_2 = \Delta_1 \cdot S_2 + (X_1 - \Delta_1 \cdot S_1) \cdot (1 + i).$$

Ahora igualamos al payoff: $X_2 = V_2$, y resolvemos.

Portfolio replicante

- Notación: para cualquier proceso adaptado (X, S o Δ) usaremos la notación:

$$X_1(C) = X_u, \quad X_1(X) = X_d$$

$$X_2(CC) = X_{uu}, \quad X_2(CX) = X_{ud}, \quad X_2(CX) = X_{du}, \quad X_2(XX) = X_{dd}, \quad \ldots$$

- Tenemos dos ecuaciones para X_1:

$$\begin{aligned} X_u &= \Delta_0 \cdot S_u + (X_0 - \Delta_0\, S_0) \cdot (1+i) \\ X_d &= \Delta_0 \cdot S_d + (X_0 - \Delta_0\, S_0) \cdot (1+i). \end{aligned}$$

- Desconocemos X_0 (valor de la opción) y Δ_0.

Portfolio replicante

- Tendremos cuatro ecuaciones para X_2:

$$\begin{cases} \Delta_u S_{uu} + (X_u - \Delta_u S_u) \cdot (1+i) & = V_{uu} = 1 \\ \Delta_u S_{ud} + (X_u - \Delta_u S_u) \cdot (1+i) & = V_{ud} = 0 \\ \Delta_d S_{du} + (X_d - \Delta_d S_d) \cdot (1+i) & = V_{du} = 0 \\ \Delta_d S_{dd} + (X_d - \Delta_d S_d) \cdot (1+i) & = V_{dd} = 0 \end{cases}$$

- Seis ecuaciones, y seis incógnitas:

$$X_0,\ X_u,\ X_d,\ \Delta_0,\ \Delta_u,\ \Delta_d.$$

- Obtenemos Δ_u y Δ_d:

$$\Delta_u = \frac{V_{uu} - V_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} \qquad \Delta_d = \frac{V_{du} - V_{dd}}{S_{du} - S_{dd}}$$

Portfolio replicante

- Observando la analogía con el caso $n = 1$

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{1}{1+i}\left(p \cdot V_{uu} + q \cdot V_{ud}\right) \\ X_d &= \frac{1}{1+i}\left(p \cdot V_{du} + q \cdot V_{dd}\right) \end{aligned}$$

con p y q probabilidades de riesgo neutral.

- Resolvemos para X_0 y Δ_0:

$$\Delta_0 = \frac{X_u - X_d}{S_u - S_d}$$

$$X_0 = \frac{1}{1+i}\left(p \cdot X_u + q \cdot X_d\right)$$

$$\boxed{X_0 = \frac{1}{(1+i)^2} \cdot (p^2 \cdot V_{uu} + p \cdot q \cdot V_{ud} + q \cdot p \cdot V_{du} + q^2 \cdot V_{dd}}$$

En el ejemplo

En el ejemplo dado tenemos:

$$p = \frac{1.025 - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.625 \qquad\qquad q = 0.375.$$

$$\begin{cases} \Delta_u\, 24.2 + (X_u - \Delta_u\, 22) \cdot 1.025 & = 3.2 \\ \Delta_u\, 19.8 + (X_u - \Delta_u\, 22) \cdot 1.025 & = 0 \\ \Delta_d\, 19.8 + (X_d - \Delta_d\, 18) \cdot 1.025 & = 0 \\ \Delta_d\, 16.2 + (X_d - \Delta_d\, 18) \cdot 1.025 & = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_u = \frac{3.2 - 0}{24.2 - 19.8} \simeq 0.7272 \qquad\qquad \Delta_d = \frac{0 - 0}{19.2 - 16.2} = 0$$

$$X_u = \frac{1}{1.025}\,(0.625 \cdot 3.2 + 0.375 \cdot 0) \simeq 1.95$$

$$X_d = \frac{1}{1.025}\,(0.625 \cdot 0 + 0.375 \cdot 0) = 0$$

En el ejemplo

Con estos valores resolvemos para X_0 y Δ_0:

$$\Delta_0 = \frac{X_u - X_d}{22 - 18} \simeq 0.4878$$

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{1.025} \cdot (0.625 \cdot X_u + 0.375 \cdot X_d) \\ &= \frac{1}{(1.025)^2} \cdot ((0.625^2 \cdot 3.2 + 2 \cdot 0.625 \cdot 0.375 \cdot 0 + (0.375)^2 \cdot 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{X_0 = \frac{1.25}{(1.025)^2} \simeq 1.1897}.$$

Resultados

Valoración de la opción

Los valores X_k, $k = 0, 1, 2$, definen el valor de la opción en el tiempo $t = k$.

$$V_k = X_k$$

- Observamos que:

$$V_u = \frac{1}{1+i}\left(p\, V_{uu} + q\, V_{ud}\right) \qquad V_d = \frac{1}{1+i}\left(p\, V_{du} + q\, V_{dd}\right)$$

- Luego

$$V_1 = \frac{1}{1+i} \cdot E\left[V_2 \mid M_1\right]$$

- Análogamente:

$$V_0 = \frac{1}{1+i} \cdot E\left[V_1 \mid M_0\right]$$

El modelo binomial multiperiódico

El caso general

Mercado completo

Un mercado se dice **completo** si todo derivado es replicable por un portfolio formado por el subyacente y la cuenta bancaria.

- El modelo binomial es completo.
- Si es completo, la valoración sin arbitraje permite dar un valor único para el precio del derivado.

Teorema de replicación

Teorema (Teorema de replicación)

Sea V_n una variable aleatoria (payoff de un derivado) sobre Ω. Sean p y q las probabilidades de riesgo neutral y para cada $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ definimos las variables aleatorias V_k:

$$V_k = \frac{1}{1+i} \cdot E[V_{k+1} \mid M_k].$$

Para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, sea $\{\Delta_k\}$ el proceso de delta-cobertura:

$$\Delta_k(\omega_1 \ldots \omega_k) = \frac{V_{k+1}(\omega_1 \ldots \omega_k C) - V_{k+1}(\omega_1 \ldots \omega_k X)}{S_{k+1}(\omega_1 \ldots \omega_k C) - S_{k+1}(\omega_1 \ldots \omega_k X)}.$$

Entonces, si $X_0 = V_0$ y para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ se define

$$X_{k+1} = \Delta_k S_{k+1} + (X_k - \Delta_k S_k)(1+i),$$

entonces resulta $X_n = V_n$. Esto es, $\{X_k \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$ es un portfolio replicante.

Valor del derivado

Valor del derivado

Para $k = 1, 2, \ldots, n$ la variable aleatoria $V_n(\omega_1\omega_2\ldots\omega_k)$ en el Teorema de replicación se define como el **precio del derivado en tiempo** k si las primeras k tiradas son $\omega_1\ldots\omega_k$. El precio de un derivado en tiempo $t = 0$ se define como V_0.

Martingalas

Propiedad de martingala del portfolio replicante descontado

El proceso

$$\frac{X_k}{(1+i)^k}$$

es una martingala.

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{X_{k+1}}{(1+i)^{k+1}} \mid M_k\right] &= E\left[\Delta_k \frac{S_{k+1}}{(1+i)^{k+1}} + \frac{X_k - \Delta_k S_k}{(1+i)^k} \mid M_k\right] \\
&= \Delta_k E\left[\frac{S_{k+1}}{(1+i)^{k+1}} \mid M_k\right] + E\left[\frac{X_k - \Delta_k S_k}{(1+i)^k} \mid M_k\right] \\
&= \Delta_k \frac{S_k}{(1+i)^k} + \frac{X_k - \Delta_k S_k}{(1+i)^k} \\
&= \frac{X_k}{(1+i)^k}
\end{aligned}$$

Valoración del derivado

Si V_n es el payoff de un derivado que depende sólo de las primeras n tiradas, entonces:

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot E\left[V_n\right]}$$

- Observación: No es necesario calcular el portfolio replicante para valorar la opción.

Prima de una call y una put

Prima de una call

En el modelo binomial, la prima de una opción **call europea** con strike K que madura en n períodos está dada por:

$$c = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot E[(S_n - K)^+].$$

Prima de una put

La prima de una opción **put europea** con strike K que madura en n períodos está dada por:

$$p = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot E[(K - S_n)^+].$$

Paridad put-call

Paridad put call

Si c y p denotan la prima de una call y una put europeas, respectivamente, sobre un mismo subyacente con valor hoy S_0, con igual madurez $t = n$ y strike K, entonces se cumple que:

$$c - p = S_0 - K \cdot \frac{1}{(1+i)^n}.$$

$$\begin{aligned}
c - p &= (1+i)^{-n} \cdot E[(S_n - K)^+] - (1+i)^{-n} \cdot E[(K - S_n)^+] \\
&= (1+i)^{-n} \cdot E[(S_n - K)^+ - (K - S_n)^+] \\
&= (1+i)^{-n} \cdot E[S_n - K] \\
&= S_0 - K \cdot \frac{1}{(1+i)^n}.
\end{aligned}$$

Valoración de opciones exóticas

Opciones exóticas

Algunas opciones exóticas cuyo payoff depende la trayectoria del activo:

- Asiáticas: su payoff depende de un promedio de valores del activo.
- Barrera: se anulan o bien entran en vigencia, según si el activo ha cruzado determinado valor.
- Lookback: su payoff depende del máximo o mínimo valor que haya tomado el subyacente.

Opción barrera

B: Barrera, de una call o de una put.

- Up-and-out: $S_0 < B$, y la opción pierde valor si supera la barrera.
- Down-and-out: $S_0 > B$, y la opción pierde valor si baja de la barrera.
- Up-and-in: $S_0 < B$, y el activo debe superar B para activar la opción.
- Down-and-in: $S_0 > B$ y el activo debe bajar de B para activar la opción.

Ejemplo de opción barrera

Opción call barrera down and out

Consideremos una opción call barrera down-and-out, con strike $K = 100$, con vencimiento en dos períodos, y barrera $B =$\$95. El activo subyacente sigue un modelo binomial con $S_0 = 100$, $u = 1.1$, $d = 0.9$, y la tasa libre de riesgo es del 5 %.

- Barrera: $B = 95$.
- Strike: $K = 100$.
- $S_0 = 100$
- $u = 1.1$, $d = 0.9$, $p = 0.75$.
- $i = 0.05$.

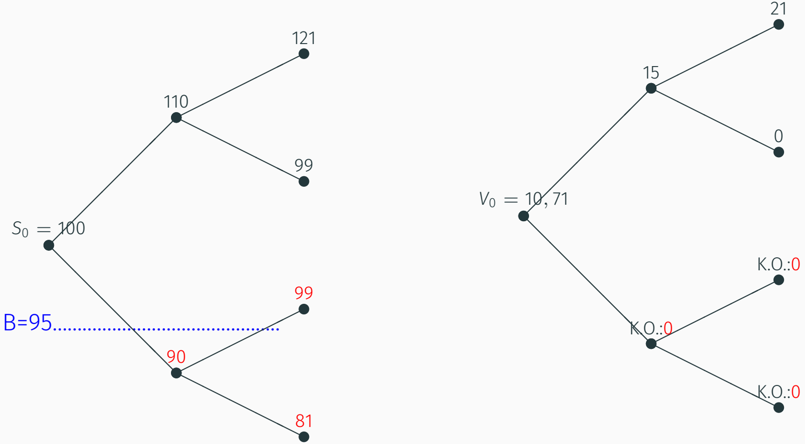


Figura 2: Opción barrera down and out

Valoración de la opción barrera

- El payoff depende de las primeras dos tiradas:

$$V_{uu} = 21 \qquad V_{ud} = V_{du} = V_{dd} = 0.$$

- Por el Teorema de replicación:

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{(1.05)^2}\, 0.75^2 \cdot 21 \simeq 10.71.}$$

- Combinar esta opción con una call barrera down and in produce el mismo payoff que una call europea.

Opción lookback

Opciones lookback

Las opciones lookback son aquellas cuyo payoff depende del valor máximo o mínimo que haya alcanzado el subyacente durante la vigencia del contrato.

- Con strike fijo K:

$$\begin{cases} \max_{0\leq t\leq T}\{S_t - K, 0\} & \text{opción call} \\ \max_{0\leq t\leq T}\{K - S_t, 0\} & \text{opción put} \end{cases}$$

- Con strike flotante:

$$\begin{cases} S_T - \min_{0\leq t\leq T}\{S_t\} & \text{opción call} \\ \max_{0\leq t\leq T}\{S_t\} - S_T & \text{opción put} \end{cases}$$

Ejemplo

Ejemplo

Valorar una opción call lookback con strike flotante sobre un activo con $S_0 = 100$, $u = 1.2$, $d = 0.8$ e $i = 0.05$, que madura en dos períodos.

$$\begin{aligned}
\text{Payoff} &= \text{máx}_{0 \leq t \leq 2}\{S_2 - S_t), 0\} \\
&= S_2 - \text{mín}_{0 \leq t \leq 2}\{S_t\}
\end{aligned}$$

$$p = \frac{1.05 - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.625 \qquad q = 0.375.$$

Árbol binomial

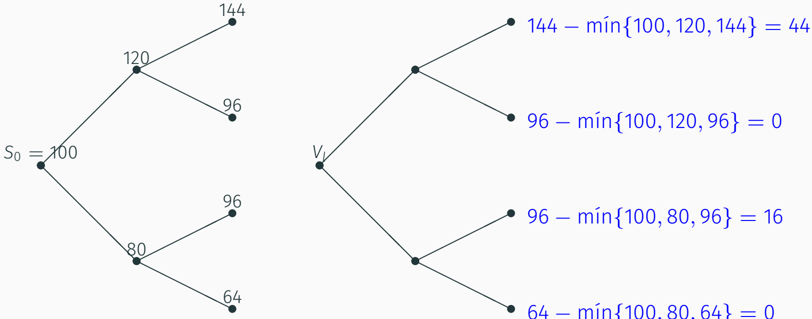


Figura 3: Call lookback con strike flotante

Valoración de la opción lookback

- El payoff depende de las primeras dos tiradas:

$$V_{uu} = 44 \qquad V_{ud} = V_{dd} = 0 \qquad V_{du} = 16.$$

- Por el Teorema de replicación:

$$V_0 \quad = \quad \frac{1}{1.05^2}\left(0.625^2 \cdot 44 + 0.375 \cdot 0.625 \cdot 16\right)$$

$$\boxed{V_0 \simeq 18,99.}$$

Opción asiática

Las opciones asiáticas son aquellas cuyo payoff depende del promedio de los precios que ha tomado el activo durante la vigencia de la opción.

- Para cada trayectoria de precios se define S_{prom} como la media aritmética de los precios del subyacente.
- Con strike fijo K:

$$\text{Payoff} = \begin{cases} \text{máx}\{S_{prom} - K, 0\} & \text{para una call} \\ \text{máx}\{K - S_{prom}, 0\} & \text{para una put} \end{cases}$$

- Con strike flotante:

$$\text{Payoff} = \begin{cases} \text{máx}\{S_T - S_{prom}, 0\} & \text{para una call} \\ \text{máx}\{S_{prom} - S_T, 0\} & \text{para una put.} \end{cases}$$

Ejemplo

Ejemplo de opción asiática

Valorar una opción asiática con strike fijo $K = 95$, con vencimiento en dos períodos, para una acción con $S_0 = 100$, $u = 1.2$, $d = 0.8$, siendo la tasa periódica del 5 %.

Árbol binomial

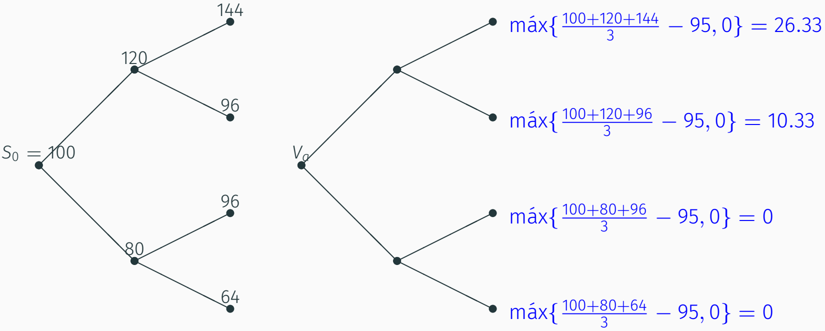


Figura 4: Opción asiática con strike fijo

Valoración de la opción asiática

- El payoff depende de las primeras dos tiradas:

$$V_{uu} = 26.33 \qquad V_{ud} = 10.33 \qquad V_{du} = V_{dd} = 0.$$

- Por el Teorema de replicación:

$$V_0 \quad = \quad \frac{1}{1.05^2}\left(0.625^2 \cdot 26.33 + 0.625 \cdot 0.375 \cdot 10.33\right)$$

$$\boxed{V_0 \simeq 11.52.}$$