RSME-UMA 2017
BUENOS AIRES
11~15 DICIEMBRE 2017

Introducción a modelos matemáticos aplicados a finanzas cuantitativas

Clase 1: Introducción al modelo binomial

Patricia Kisbye

12, 14 y 15 de diciembre de 2017

Encuentro de Estudiantes - UMA - RSME

Conceptos financieros

Invertir dinero

Valor temporal del dinero

¿Qué preferimos?

- ¿Que nos den \$1000 hoy?
- ¿Que nos den \$1000 dentro de un mes?

Hoy podemos invertir este dinero:

- Sin riesgo: depositando en el banco, a una tasa de interés fija.
- Con riesgo. En activos: acciones, commodities, monedas.
- Cobertura al riesgo: En derivados: contratos forward, futuros, opciones.

La cuenta bancaria

La cuenta bancaria

Si hoy depositamos \$1.000 en el banco y la tasa de interés es del 5 % anual, al cabo de dos años tendremos

$$\$1.000 \cdot (1 + 0.05)^2 = \$1.000 \cdot (1.05)^2.$$

- $B(0) = 1000$.
- Tasa anual libre de riesgo: $i = 0.05$.
- Valor de la cuenta en n años:

$$\begin{aligned} B(n) &= B(0) \cdot \underbrace{(1+i) \cdot (1+i) \cdots (1+i)}_{n \text{ años}} \\ B(0) &= B(0) \cdot (1+i)^n \end{aligned}$$

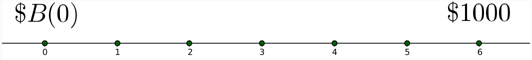
Valor descontado

Valor descontado

Si la tasa libre de riesgo es i, el **valor descontado** n períodos de una cantidad C es

$$\frac{1}{(1+i)^n}\,C.$$

- $B(n) = C$, entonces $B(0) \cdot (1+i)^n = C$.

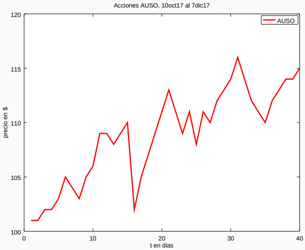


$$B(0) = \frac{1}{(1+i)^6} \cdot \$1000$$

Acciones

Las acciones

Son posesiones de una parte de una empresa. Su valor tiene un comportamiento aleatorio en el tiempo.



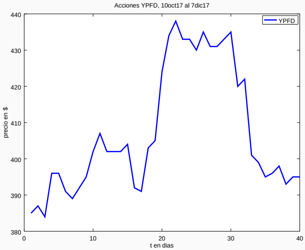


Figura 1: Precios de acciones

Opciones

Opción call europea

Una acción cuesta hoy \$100. Existe una opción call que nos da derecho a comprar esta opción dentro de un mes a \$110.

- Si en un mes la acción cuesta \$130, ejercemos la opción y ganamos \$20.
- Si en un mes la acción cuesta menos de \$110 no la ejercemos.

- Strike: $K = \$110$.
- Madurez: $T =$ un mes.
- Subyacente: acción. $S(0) = \$100$. $S(T) =?$.
- Payoff: $\text{máx}(S(T) - 110), 0) = (S(T) - 110)^+$.

Opciones

Opción put europea

Una acción cuesta hoy \$95. Existe una opción put que nos da derecho a vender esta opción dentro de dos meses a \$105.

- Si en dos meses la acción cuesta más de \$105, no ejercemos la opción.
- Si en dos meses la acción cuesta \$80 ejercemos la opción y ganamos \$25.

- Strike: $K = \$105$.
- Madurez: $T =$ dos meses.
- Subyacente: acción. $S(0) = \$95$. $S(T) =?$.
- Payoff: $\max(105 - S(T), 0) = (105 - S(T))^+$

Opciones call y put europeas

Call europea

Una opción **call europea** es un contrato que le da derecho a una de las partes a

- comprar el subyacente (acción)
- en un tiempo futuro (madurez T)
- a un precio determinado (strike K).

Payoff de la opción call:

$$\boxed{(S(T)-K)^+}$$

¿Qué prima debe tener esta opción?

Put europea

Una opción **put europea** es un contrato que le da derecho a una de las partes a

- vender el subyacente (acción)
- en un tiempo futuro (madurez T)
- a un precio determinado (strike K).

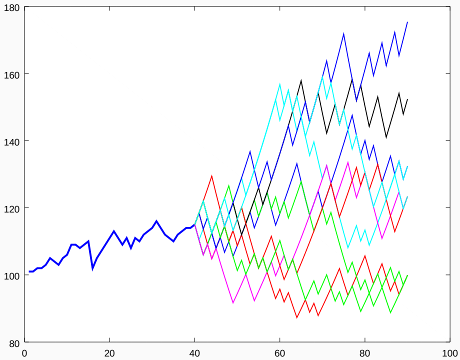
Payoff de la put:

$$\boxed{(K - S(T))^+}$$

¿Qué prima debe tener esta opción?

Modelamos la acción

- No podemos predecir el precio de la acción.
- Pero podemos proponer un **modelo** de comportamiento de los precios.
- Asumimos que el modelo nos muestra todas las trayectorias de precios posibles.



El modelo binomial

El modelo binomial

El espacio de probabilidad

Ω: todos los resultados posibles de n **tiradas independientes** de una moneda, con probabilidad $\tilde{p}$ que salga cara. $0 < \tilde{p} < 1$.

n	Ω, (C: cara, X: cruz.)
1	$\{C, X\}$
2	$\{CC, CX, XC, XX\}$
3	$\{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$
$\vdots$	$\vdots$
n	2^n resultados posibles.

$\boxed{\Omega = \{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n \mid \omega_i = C \text{ o } \omega_i = X\}}$ $\boxed{P(\omega_i = C) = \tilde{p}}$

El proceso estocástico

$$\boxed{0 < d < u}$$

La acción

Los precios de la acción siguen un proceso estocástico discreto:

$$S_0 \quad S_1 \quad S_2 \quad \ldots \quad S_n.$$

- Notación: $S_t = S(t)$.
- S_0: el precio inicial en $t = 0$. $S_0 > 0$.
- S_k: el precio de la acción en $t = k$.

$$S_k = \begin{cases} S_{k-1} \cdot u & \text{si } \omega_k = C \\ S_{k-1} \cdot d & \text{si } \omega_k = X. \end{cases}$$

Distribución de S_k

Distribución binomial de S_k

S_k es una variable aleatoria con distribución binomial $(k, \tilde{p})$, y depende sólo de las primeras k tiradas de moneda.

- $S_0 = 10, \quad u = 3 \quad d = \frac{1}{2}$

$$S_1 = \begin{cases} 30 & \text{si } \omega_1 = C \\ 5 & \text{si } \omega_1 = X \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} 90 & \text{si } \omega_1\omega_2 = CC \\ 15 & \text{si } \omega_1\omega_2 \in \{CX,\ XC\} \\ 2.5 & \text{si } \omega_1\omega_2 = XX \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} 270 & \text{si } \omega_1\omega_2 = CCC \\ 45 & \text{si } \omega_1\omega_2 \in \{CCX,\ CXC,\ XCC\} \\ 7.5 & \text{si } \omega_1\omega_2 \in \{CXX,\ XCX,\ XXC\} \\ 1.25 & \text{si } \omega_1\omega_2 \in \{XXX\} \end{cases}$$

Trayectorias

Dado $\omega \in \Omega$, los valores S_0, $S_1(\omega)$, ..., $S_n(\omega)$ definen una trayectoria de S.

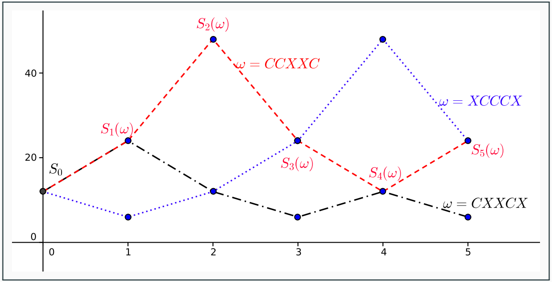


Figura 2: Tres trayectorias para $n = 5$

Hipótesis de no arbitraje

$$S_0 = 100, \quad d = 1.2, \quad u = 1.4, \quad i = 0.1.$$

- $t = 0$: Pedimos \$100 al banco y compramos la acción.
- $t = 1$: Vendemos la acción y devolvemos el dinero.
- Ganancia: $\geq$ \$10. Nunca se pierde.

$$S_0 = 100, \quad d = 1.2, \quad u = 1.4, \quad i = 0.6.$$

- $t = 0$: Vendemos una acción y depositamos los \$100 en el banco.
- $t = 1$: Retiramos el dinero y compramos la acción.
- Ganancia: $\geq$ \$20. Nunca se pierde.

Hipótesis de no arbitraje

Principio de no arbitraje

Si una estrategia con acciones y dinero comienza con valor 0:

$$X_0 = \Delta\, S_0 + (X_0 - \Delta S_0)B(0) = 0$$

entonces

$$P(X_1 > 0) > 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad P(X_1 < 0) > 0.$$

Es decir, si es probable ganar también debe ser probable perder.

En el modelo binomial, el principio de no arbitraje equivale a

$$d < 1 + i < u.$$

El modelo del mercado

- La acción: Un proceso estocástico discreto.

$$S_0, \qquad S_k = \begin{cases} S_{k-1} \cdot u & \text{si } \omega_k = C \\ S_{k-1} \cdot d & \text{si } \omega_k = X. \end{cases}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

- La cuenta bancaria:

$$B(k) = (1+i)^k \qquad\qquad 0 \leq k \leq n.$$

- Hipótesis de no arbitraje:

$$d < 1 + i < u$$

- La opción: Una variable aleatoria que depende de las n tiradas:

$$V_n = (S_n - K)^+.$$

- El objetivo: Valorar la opción en $t = 0$.

El modelo binomial de un paso

El caso $n = 1$

Ejemplo de una call

- Una acción cuesta actualmente \$20. En tres meses, el precio de la acción será \$18 o \$22.
- La tasa de interés trimestral es del 2.5 %.
- ¿Cuál es la prima que debe tener una opción de compra call a tres meses sobre esta acción, si el strike K es de \$21?

Datos

El modelo

- $S_0 = 20$.
- $S_u = S_1(C) = 22$.
- $S_d = S_1(X) = 18$.
- Entonces $u = 1.1$ y $d = 0.9$.
- $i = 0.025$.
- Payoff: $(S_1 - 21)^+$

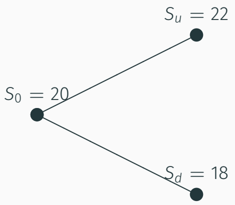


Figura 3: La acción

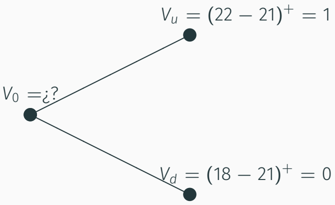


Figura 4: La opción

Solución

Portfolio replicante

Definimos un proceso formado por acciones y dinero

$$X_0 \qquad X_1$$

tal que X_1 iguale al payoff de la opción.

- X_0: valor inicial del portfolio.
- Δ: cantidad de acciones.

$$X_0 = \underbrace{\Delta \cdot S_0}_{\text{acciones}} + \underbrace{(X_0 - \Delta \cdot S_0)}_{\text{dinero}}$$

- En $t = 1$:

$$X_1 = \Delta \cdot S_1 + (X_0 - \Delta \cdot S_0) \cdot (1 + 0.025)$$

Solución

- Portfolio replicante

$$X_u = X_1(C) \qquad X_d = X_1(X)$$

$$X_u = \Delta \cdot 22 + (X_0 - \Delta \cdot 20) \cdot (1.025)$$
$$X_d = \Delta \cdot 18 + (X_0 - \Delta \cdot 20) \cdot (1.025)$$

- Igualamos al payoff de la opción

$$\begin{aligned} \Delta \cdot 22 + (X_0 - \Delta \cdot 20) \cdot (1.025) &= 1 \\ \Delta \cdot 18 + (X_0 - \Delta \cdot 20) \cdot (1.025) &= 0 \end{aligned}$$

- Resolvemos

$$\Delta = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} = \frac{1}{4} \qquad X_0 = \frac{1 - \Delta \cdot 22}{1.025} + \Delta \cdot 20 = \frac{0.625}{1.025}$$

Solución

Solución

La prima de la opción call europea es

$$V_0 = \frac{0.625}{1.025} \simeq 0.60975.$$

- Portfolio replicante en $t = 0$.

$$\underbrace{\frac{0.625}{1.025}}_{X_0} = \underbrace{0.25 \cdot 20}_{\text{acciones}} + \underbrace{-\frac{4.5}{1.025}}_{\text{préstamo}}$$

- Si la moneda sale cara:

$$X_u = 0.25 \cdot 22 - 4.5 = 1$$

- Si la moneda sale cruz:

$$X_d = 0.25 \cdot 18 - 4.5 = 0$$

Probabilidades de riesgo neutral

Revisemos la solución para V_0:

$$X_0 = (V_u - \Delta\, S_u) \cdot \frac{1}{1+i} + \Delta \cdot S_0,$$

Reemplazando Δ:

$$X_0 \quad = \quad \frac{1}{1+i}\left(\underbrace{\frac{1+i-d}{u-d}}_{p} \cdot V_u + \underbrace{\frac{u-(1+i)}{u-d}}_{q} \cdot V_d\right)$$

Nueva medida de probabilidad

Los valores p y q definen una nueva medida de probabilidad en Ω:

$$P(\omega_i = C) = p = \frac{1+i-d}{u-d}, \qquad P(\omega_i = X) = d = \frac{u-(1+i)}{u-d}.$$

Probabilidad neutral al riesgo

Bajo las probabilidades p y q se cumple que:

$$E[S_1] = p \cdot S_0\, u + q \cdot S_0\, d = S_0 \cdot (1 + i).$$

p y q definen una probabilidad neutral al riesgo.

- Bajo esta probabilidad, se espera que el activo tenga un rendimiento igual a la tasa de riesgo.

Valor de un derivado

Valor de la opción

En el modelo binomial de un paso, la prima de una opción con payoff V_1 está dada por el valor esperado descontado de su payoff.

$$V_0 = \frac{1}{1+i}\,(p\,V_u + q\,V_d) = \frac{1}{1+i}\,E[V_1].$$

O también podemos decir:

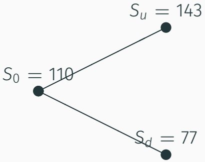
Valor de la opción

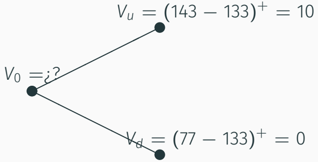
En el modelo binomial de un paso, la prima de una opción con payoff V_1 está dada por el valor esperado de su payoff descontado .

$$V_0 = \frac{1}{1+i}\,(p\,V_u + q\,V_d) = E[\frac{1}{1+i} \cdot V_1].$$

Ejemplos

Una acción está valuada en \$110. En un año el precio de la acción será de \$143 o \$77. Valorar una opción **call europea** con strike $K = \$133$ con madurez en un año, y una tasa anual libre de riesgo es 3 %.



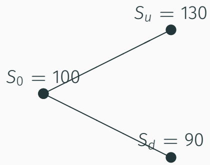


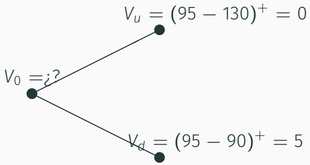
- $u = 1.3$, $d = 0.7$
- $p = \dfrac{1.03 - 0.7}{1.3 - 0.7} = 0.55$
- $\Delta = 0.1515$

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{1}{1.03}(0.55 \cdot 10 + 0.45 \cdot 0) \\
&= \boxed{\frac{5.5}{1.03} \simeq 5.34}
\end{aligned}
$$

Ejemplos

Una acción está valuada en \$100. En un año el precio de la acción será de \$130 o \$90. Valorar una opción **put europea** sobre esta acción con strike $K = 95$ y madurez un año. La tasa de interés efectiva anual sin riesgo es del 5 %.





- $u = 1.3$, $d = 0.9$
- $p = \dfrac{1.05 - 0.9}{1.3 - 0.9} = 0.375$
- $\Delta = -0.125$

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{1.05}(0.375 \cdot 0 + 0.625 \cdot 5) \\ &= \boxed{\frac{3.125}{1.05} \simeq 2.976} \end{aligned}$$

Paridad put-call

Paridad put-call

Si c y p denotan la prima de una call y una put europeas respectivamente, sobre un mismo subyacente con valor S_0, con igual strike K y madurez en $t = 1$. Sea i la tasa libre de riesgo. Entonces se cumple que:

$$c - p = S_0 - K \cdot \frac{1}{(1+i)}$$

$$\begin{aligned}
c - p &= \frac{1}{1+i} \cdot E[(S_1 - K)^+] - \frac{1}{1+i} \cdot E[(K - S_1)^+] \\
&= \frac{1}{1+i} \cdot E[(S_1 - K)^+ - (K - S_1)^+] \\
&= \frac{1}{1+i} \cdot E[S_1 - K] \\
&= S_0 - K \cdot \frac{1}{(1+i)}
\end{aligned}$$