Ángulos y Cortocircuitos en espacios de Hilbert

Demetrio Stojanoff

November 4, 2017

Índice

Introducción

El curso trata sobre técnicas y problemas elementales pero poco frecuentados en el contexto de operadores en espacios de Hilbert. En la primera parte se da una versión organizada de la teoría de ángulos entre subespacios cerrados en un Hilbert, relacionándola con distancias entre conjuntos y normas de productos de proyectores.

Las definiciones que daremos están bastante estandarizadas, aunque hay numerosas variaciones menores en la literatura, y una infinidad de notaciones diferentes. Las propiedades de estos ángulos son muy útiles en dimensión finita (entre otras razones por su relación con normas, valores singulares, máximos y mínimos de matrices), pero son aún más relevantes en el caso infinitodimensional, donde puede pasar que dos subespacios cerrados de un Hilbert $\mathcal{H}$ cumplan que $\mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \{0\}$ pero el ángulo entre ellos sea *nulo*. Veremos que eso significará que $\mathcal{N} + \mathcal{M}$ no es cerrado en $\mathcal{H}$.

El uso de ángulos y sus propiedades, una vez sistematizadas, simplifica drásticamente muchas demostraciones en diversos campos de la Teoría de operadores. Y al simplificar, permite también conseguir resultados nuevos. Pero es importante dar una versión sistematizada, porque es usual cometer errores elementales con los ángulos si uno no va con cuidado, y eso reduciría las ventajas antedichas de la teoría.

En la primera parte se exponen también dos conceptos muy relacionados con los ángulos: las seudoinversas y el módulo mínimo de operadores. Con esas tres cartas en la mano, veremos diversas aplicaciones elementales a operadores.

La segunda parte tiene como principal objetivo entender las representaciones en matrices de bloques de los operadores positivos, particularmente qué relaciónes hay entre sus bloques coordenados: desigualdades de normas, inclusiones de rangos y cosas de ese tipo.

Se comienza con un clásico resultado de Ron Douglas que caracteriza inclusiones de rangos de operadores (este teorema solo ya justifica el curso, porque es sorprendentemente útil). Con esto y las herramientas de la primera parte se puede generalizar sin dificultades casi todos los resultados de matrices (positivas de bloques) al caso de espacios de Hilbert infinitodimensionales. Se desarrolla en particular el concepto de complemento de Schur, o "cortocircuito" (shorted), otro caso de una teoría elemental, con importantes aplicaciones, pero poco frecuantada en libros y cursos.

El contenido de este curso es una reformulación de los dos primeros capítulos del libro Análisis Funcional vs, Matricial [6], en el que se estudian aspectos muy "matriciales" de la teoría de operadores.

Capítulo 1

Ángulos entre subespacios.

1.1 Preliminares y Notaciones

En lo que sigue trabajaremos en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Para recordar conceptos, repasaremos a continuación algunas propiedades y notaciones del tema, extraídas de los primeros capítulos del libro [6] en que se basa este apunte:

- ⋄ Usaremos las letras $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, etc, para denotar espacios de Hilbert (EH's), que asumiremos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$.
- ⋄ Llamaremos $L(\mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2)$ al espacio de operadores lineales acotados de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$.
- ⋄ Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, escribiremos $L(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, que es una $\mathbb{C}$-álgebra.
- ⋄ Dado $C \in L(\mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2)$, notaremos $R(C)$ a su rango, y $\ker C$ o $N(C)$ a su núcleo.
- ⋄ Si $A \in L(\mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2)$, su norma (de operadores) es

  $$\|A\| = \sup\big\{\|A\xi\| : \xi \in \mathcal{H}_1 \ , \ \|\xi\| = 1\big\} \ = \ \min\big\{C \geq 0 : \|A\xi\| \leq C\|\xi\| \ , \ \xi \in \mathcal{H}_1\big\} \ .$$

  Con esta norma, $L(\mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2)$ es un espacio de Banach (y $L(\mathcal{H})$ un álgebra de Banach).
- ⋄ $\mathcal{G}l(\mathcal{H})$ denota al grupo (abierto) de operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$.
- ⋄ Si $A \in L(\mathcal{H})$, su espectro es

  $$\sigma(A) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \notin \mathcal{G}l(\mathcal{H}) \ \big\} \ ,$$

  que es compacto y no vacío.
- ⋄ Si $A \in L(\mathcal{H})$, su radio espectral y radio numérico son

  $$\rho(A) = \max\big\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\big\} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \quad \text{y} \quad w(A) = \sup_{\|\xi\|=1} |\,\langle A\xi, \xi\rangle\,| \ .$$

  Se tiene que $\rho(A) \leq w(A) \leq \|A\|$ y las recíprocas no valen en general.

- ⋄ Si $A \in L(\mathcal{H}_1\,,\,\mathcal{H}_2)$, su adjunto $A^* \in L(\mathcal{H}_2\,,\mathcal{H}_1)$ es el único operador que cumple que
$$\langle A\xi,\eta\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \xi, A^*\eta\rangle_{\mathcal{H}_1} \quad \text{para todo} \quad \xi\in\mathcal{H}_1\ ,\ \ \eta\in\mathcal{H}_2\ .$$
- ⋄ $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \big\{A\in L(\mathcal{H}) : A^* = A\big\}$ es el subespacio real de operadores autoadjuntos.
- ⋄ $\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \big\{U \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})\ :\ U^{-1} = U^*\big\}$, el grupo unitario de $\mathcal{H}$.
- ⋄ $L(\mathcal{H})^+ = \big\{A \in L(\mathcal{H}) : \langle A\xi,\xi\rangle \ge 0 \text{ para todo } \xi\in\mathcal{H}\big\} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{H})$, el cono de los operadores semidefinidos positivos.
- ⋄ Notaremos $\mathcal{G}l(\mathcal{H})^+ = \mathcal{G}l(\mathcal{H})\cap L(\mathcal{H})^+$, los operadores positivos inversibles.
- ⋄ Usaremos la notación $\mathcal{S}\sqsubseteq\mathcal{H}$ para denotar que $\mathcal{S}$ es un *subespacio cerrado* de $\mathcal{H}$.
- ⋄ Dado $X\subseteq\mathcal{H}$, notaremos $\operatorname{span}\{X\}$ al subespacio generado por X.
- ⋄ $\overline{\operatorname{span}}\{X\}\sqsubseteq\mathcal{H}$ denotará a la clausura (en norma) de $\operatorname{span}\{X\}$.
- ⋄ Dados $\mathcal{S},\mathcal{T}\sqsubseteq\mathcal{H}$, se escribe $\mathcal{S}+\mathcal{T} = \operatorname{span}\{\mathcal{S}\cup\mathcal{T}\}$. Noteremos $\mathcal{S}+\mathcal{T} = \mathcal{S}\oplus\mathcal{T}$ si la suma es cerrada y $\mathcal{S}\cap\mathcal{T} = \{0\}$. Si además $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}^\perp$, escribiremos $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T} = \mathcal{S}\perp\mathcal{T}$.
- ⋄ En cambio, dada una familia $\{\mathcal{S}_i\}_{i\in I}$ de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$, llamaremos
$$\bigvee_{i\in I}\mathcal{S}_i \ = \ \overline{\operatorname{span}}\left\{\bigcup_{i\in I}\mathcal{S}_i\right\}\ .$$

Por otra parte, se usarán sin mayores explicaciones algunas propiedades usuales de los operadores en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, como por ejemplo:

- Todas las propiedades de los operadores compactos ([6, Cap. 7]).
- Los teoremas de la imagen abierta (TIA), del gráfico cerrado (TGC), y de acotación uniforme (PAU).
- Si $\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\sqsubseteq\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}\oplus\mathcal{N} = \mathcal{H}$, la proyección $P_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$ de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{M}$ dada por
$$P_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}(x+y) = x\ , \quad \text{para} \quad x\in\mathcal{M} \quad \text{e} \quad y\in\mathcal{N} \tag{1.1}$$
es acotada (sale por el TGC).
- Existencia de raices cuadradas de operadores en $L(\mathcal{H})^+$.
- La descomposición polar (DP) $A = U|A|$ para cualquier $A\in L(\mathcal{H})$, donde $|A| = (A^*A)^{1/2}$ y $U : \ker A^\perp \to \overline{R(A)}$ es una isometría parcial. También la DP a derecha: $A = |A^*|U$, con el mismo U de antes.
- Si $A\in L(\mathcal{H})$, entonces $R(A^*)^\perp = \ker A$ y $\ker A^*A = \ker A$.

- Si $A \in L(\mathcal{H})^+$, entonces $R(A) \subseteq R(A^{1/2}) \subseteq \overline{R(A)}$.
- Las propiedades de proyectores oblícuos $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ y ortogonales $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Por elemplo que, si $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ se tiene que $Q \in L(\mathcal{H})$ y $Q^2 = Q$,
  1. $R(Q) \sqsubseteq \mathcal{H}$ y además $R(Q) \oplus \ker Q = \mathcal{H}$.
  2. $Q \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \iff Q \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) \iff Q \geq 0 \iff \|Q\| = 1 \iff R(Q) = N(Q)^\perp$.
  3. Si $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$ existe un único proyector ortogonal $P_\mathcal{S} \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ tal que $R(P_\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.
  4. Si $\mathcal{S}, \mathcal{T} \sqsubseteq \mathcal{H}$ cumplen $\mathcal{S} \oplus \mathcal{T} = \mathcal{H}$ (suma no necesariamente ortogonal), entonces el proyector $P_{\mathcal{S}/\mathcal{T}}$ dado por $P_{\mathcal{S}/\mathcal{T}}(s+t) = s$ (si $s \in \mathcal{S}$ y $t \in \mathcal{T}$) es acotado.
- Propiedades básicas de la convergencia *fuerte* de operadores (SOT):

  $$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{S.O.T.}} A \quad \text{si} \quad A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} Ax \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H} \ . \tag{1.2}$$

  En particular, que si la sucesión (A_n) está en $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, es decreciente (resp. creciente) y acotada, entonces existe $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ tal que $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{S.O.T.}} A$. En este caso, al límite se lo llama $A = \inf_n A_n$ (resp. $A = \sup_n A_n$).
- Propiedades básicas de la convergencia *débil* de operadores (WOT):

  $$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{W.O.T.}} A \quad \text{si} \quad \langle A_n x, y\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle Ax, y\rangle \quad \text{para todo par} \quad x, y \in \mathcal{H} \ .$$

  En particular, que las topologías WOT y w^* (de $L(\mathcal{H})$ pensado como el dual de $L^1(\mathcal{H})$, los operadores traza) coinciden en la bola cerrada $B_{L(\mathcal{H})}$. Luego, por el Teorema de Alaoglu, sabemos que $L(\mathcal{H})_1$ es WOT compacta.
- También se usará que, si $\mathcal{H}$ es separable, entonces la topología WOT de $L(\mathcal{H})$ es metrizable, por lo que será suficiente operar con sucesiones (en lugar de redes).

No se usará (salvo ocacionalmente, y con aclaraciones) el cálculo funcional boreliano y el teorema espectral para operadores normales o autoajduntos. Sí usaremos el cálculo funcional continuo (CFC) para esos operadores, pensado como límite de polinomios en z y $\overline{z}$ (o en la variable real x, en el caso autoadjunto) evaluados en el operador. Esto se usará, en particular, para definir $A^{1/2}$ o más generalmente A^t, si $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $0 < t \in \mathbb{R}$.

1.2 Ángulos

Es natural definir el ángulo entre dos subespacios $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M} \sqsubseteq \mathcal{H}$ como el mínimo de los ángulos entre pares de rectas, una en $\mathcal{N}$ y la otra en $\mathcal{M}$. Sin embargo este método tiene problemas si $\mathcal{N} \cap \mathcal{M} \neq \{0\}$, porque no estaría bien que en ese caso el ángulo sea nulo. Para ello conviene *sacar* a cada subespacio la intersección, y quedarse con sus complementos ortogonales

$$\mathcal{M} \ominus \mathcal{N} = \mathcal{M} \cap (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^\perp \quad \text{y} \quad \mathcal{N} \ominus \mathcal{M} = \mathcal{N} \cap (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^\perp \ .$$

Sugerimos dibujar dos planos en $\mathbb{R}^3$ y convencerse de que esta técnica (que deja tan solo un par de rectas para elegir) da lo que uno intuitivamente definiría como ángulo entre esos planos.
Las siguientes definiciones están bastante estandarizadas, aunque hay numerosas variaciones menores en la literatura, y una infinidad de notaciones diferentes. Las propiedades de estos ángulos son muy útiles en dimensión finita (entre otras razones por su relación con normas, valores singulares, máximos y mínimos de matrices), pero es aún más relevante en el caso infinitodimensional, donde puede pasar que $\mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \{0\}$ pero el ángulo entre ellos sea *nulo*. Veremos que eso significará que $\mathcal{N} + \mathcal{M} \not\sqsubseteq \mathcal{H}$.

Definición 1.2.1 (Friedrichs)**.** Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$.

1. Llamaremos $\mathcal{M}_1 = \{\xi \in \mathcal{M} : \|\xi\| = 1\}$, la cáscara de la bola $B_{\mathcal{M}}$.

2. El *ángulo* entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es el número $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo coseno está dado por

$$c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = \sup \,\Big\{\, |\,\langle x,\, y\rangle\,| : \; x \in (\mathcal{M} \ominus \mathcal{N})_1 \;, \quad y \in (\mathcal{N} \ominus \mathcal{M})_1 \,\Big\} \;.$$

   Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ o $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, ponemos $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = 0$, como si fueran ortogonales.

3. El *seno* del ángulo entre $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ es $s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = (1 - c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,])^{1/2}$. △

Observación 1.2.2. Es importante aclarar que, si bien es cierto que el ángulo entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es cero si y sólo si $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = 1$, en este approach se está excluyendo de esa situación el caso en que $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, o más generalemte que uno esté contenido en el otro.

O sea que el decir que el ángulo es nulo sólo significará que se pueden ir encontrando pares de vectores cada vez más alineados, uno en cada subespacio. Pero se excluye el tradicional significado de tener ángulo cero (que es estar alineados exactamente).

Sin ir más lejos, veremos en seguida que basta que uno de los subespacios tenga dimensión finita para que el ángulo NO PUEDA ser nulo. △

Proposición 1.2.3. Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces

1. $0 \le c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] \le 1$.

2. $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = c\,[\,\mathcal{N}\,,\,\mathcal{M}\,]$.

3. $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = c\,[\,\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}\,,\,\mathcal{N}\,] = c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N} \ominus \mathcal{M}\,] = c\,[\,\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}\,,\,\mathcal{N} \ominus \mathcal{M}\,]$.

4. $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} - P_{\mathcal{M}\cap\mathcal{N}}\| = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}}\| = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{(\mathcal{M}\cap\mathcal{N})^\perp}\|$. En particular,

$$\text{si} \quad \mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\} \;, \quad \text{se tiene que} \qquad c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\| \;. \tag{1.3}$$

Demostración. Los dos primeros enunciados se deducen fácilmente de las definiciones. El coseno $c\,[\,\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}\,,\,\mathcal{N}\,]$ se calcula con vectores

$$x \in (\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}) \ominus \mathcal{N} = \mathcal{M} \ominus \mathcal{N} \qquad \text{e} \qquad y \in \mathcal{N} \ominus (\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}) = \mathcal{N}\ .$$

Observar que, si $y = y_1 + y_2 \in \mathcal{N}$ con $y_1 \in \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}$ e $y_2 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, entonces $\langle x, y\rangle = \langle x, y_1\rangle$. Mirado con atención, esto prueba 3. Para probar 4, asumamos en principio que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$. Observar que $\|P_\mathcal{M} P_\mathcal{N}\|$ se realiza con vectores $x \in \mathcal{N}_1$. Para un tal x, si $P_\mathcal{M}\, x \neq 0$, entonces

$$\|P_\mathcal{M} P_\mathcal{N}\, x\| = \|P_\mathcal{M}\, x\| = \left\langle \frac{P_\mathcal{M}\, x}{\|P_\mathcal{M}\, x\|}\,, x \right\rangle \leq c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]\ .$$

Esto prueba la desigualdad $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] \geq \|P_\mathcal{M} P_\mathcal{N}\|$. Ahora bien, dados $y \in \mathcal{M}_1$ y $x \in \mathcal{N}_1$, se tiene (por Cauchy-Schwarz) que

$$|\langle y, x\rangle| = |\langle y, P_\mathcal{M}\, x\rangle| \leq \|y\|\ \langle P_\mathcal{M}\, x, P_\mathcal{M}\, x\rangle^{1/2} = \|P_\mathcal{M} P_\mathcal{N}\, x\| \leq \|P_\mathcal{M} P_\mathcal{N}\|\ ,$$

lo que prueba la desigualdad recíproca. Veamos ahora el caso en que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \{0\}$. Usando 3 y el caso anterior, sabemos que $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N} \ominus \mathcal{M}\,] = \|P_\mathcal{M} P_{\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}}\|$. Las otras dos identidades se deducen de que $P_{\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}} = P_\mathcal{N} - P_{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}} = P_\mathcal{N}(I - P_{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}})$. □

Observación 1.2.4. La igualdad $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = c\,[\,\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}\,,\,\mathcal{N}\,]$ tiene su lado bueno y su lado malo. Lo bueno, como decíamos antes, es que permite calcular ángulos entre pares arbitrarios de subespacios cerrados, y siempre reducirse al caso en que éstos no se cortan. Lo malo es que en general, cuando los subespacios son muy específicos (núcleos, sumas, etc), se hace dificultoso muchas veces calcular efectivamente $\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$ (que es donde hay que hacer los productos escalares, o calcular distancias como veremos enseguida).

Y además pasan cosas raras, poco intuibles. Un ejemplo de cosa rara es que es falso que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S} \implies c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] \leq c\,[\,\mathcal{S}\,,\,\mathcal{N}\,]$, como uso supondría si calcula los productos internos sin tener cuidado. Sin ir más lejos, si $\mathcal{S} = \mathcal{N} + \mathcal{M}$, entonces $c\,[\,\mathcal{S}\,,\,\mathcal{N}\,]$ se hace cero, mientras que $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]$ era cualquier cosa. En general, al agrandar $\mathcal{M}$ puede surgir sorpresivamente más intersección con $\mathcal{N}$, lo que al ser restado puede generar problemas.

El uso de ángulos y sus propiedades, una vez sistematizadas, simplifica drásticamente muchas demostraciones en diversos campos de la Teoría de operadores. Y al simplificar, permite también conseguir resultados nuevos. Pero hay que ser cuidadoso, porque la intuición errada que mencionamos más arriba suele generar excesos de opitimismo en las cuentas.

Un hecho sorprendente es que el subespacio $\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$ que hay que usar para calcular $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]$, muchas veces coincide "mágicamente" con subespacios que tienen pleno sentido conceptual en las aplicaciones, y esto hace que las complicaciones que uno teme desaparezcan, o más bien hasta ayuden. Esto se irá viendo paulatinamente en las diversas aplicaciones que iremos haciendo de esta teoría en los suscesivos capítulos de estas notas (y del libro [6]) . △

Ahora daremos caracterizaciones del $s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]$ en términos de distancias: Recordemos que dados $X, Y \subseteq \mathcal{H}$, su distancia se calcula como

$$\mathrm{d}\,(X, Y) = \inf\Big\{ \|x - y\|\ :\ x \in X \quad \text{e} \quad y \in Y \Big\}\ .$$

Proposición 1.2.5. Sean $\mathcal{M},\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces

$$s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = \mathrm{d}\,(\mathcal{M}_1\,,\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}) = \mathrm{d}\,(\mathcal{N}_1\,,\mathcal{M}\ominus\mathcal{N}) = \mathrm{d}\,(\,(\mathcal{N}\ominus\mathcal{M})_1\,,\mathcal{M})\ .$$

Si $\mathcal{M}\cap\mathcal{N} = \{0\}$, tenemos que $s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = \mathrm{d}\,(\mathcal{M}_1\,,\,\mathcal{N}) = \mathrm{d}\,(\mathcal{N}_1\,,\,\mathcal{M})$ y basta.

Demostración. Por la Prop. 1.2.3, podemos asumir que $\mathcal{M}\cap\mathcal{N} = \{0\}$. Por la definición del seno y la Prop. 1.2.3, se tiene que $s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]^2 = 1 - \|P_\mathcal{M}P_\mathcal{N}\|^2$. Por otro lado, como $\mathrm{d}\,(x\,,\,\mathcal{N}) = \|x - P_\mathcal{N}\,x\| = \|P_{\mathcal{N}^\perp}\,x\|$ (mostrarlo con un dibujo), para todo $x\in\mathcal{H}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,(\mathcal{M}_1\,,\mathcal{N})^2 \ &= \inf\{\|P_{\mathcal{N}^\perp}\,x\|^2 : x\in\mathcal{M}_1\} = \inf\{1 - \|P_\mathcal{N}\,x\|^2 : x\in\mathcal{M}_1\}\\[2ex] &= 1 - \sup\{\|P_\mathcal{N}\,x\|^2 : x\in\mathcal{M}_1\} = 1 - \|P_\mathcal{N}P_\mathcal{M}\|^2 = 1 - \|P_\mathcal{M}P_\mathcal{N}\|^2,\end{aligned}$$

lo que pruba la igualdad anunciada (el segundo = usa Pitágoras). $\square$

Observación 1.2.6. Sean $\mathcal{M},\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Supongamos que $\dim\mathcal{N} < \infty$. Entonces $\mathcal{N}_1$ es compacta, y por lo tanto $0 < \mathrm{d}\,(\mathcal{N}_1\,,\mathcal{M}\ominus\mathcal{N}) = s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]$, o sea que $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] < 1$. El Corolario de abajo dará una prueba alternativa del conocido resultado de que, en este caso, $\mathcal{M}+\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Sin embargo, si ambos subespacios tienen dimensión infinita, bien puede pasar que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ tengan “ángulo nulo” aunque $\mathcal{M}\cap\mathcal{N} = \{0\}$ (ver el Ejem. 1.4.8).

Corolario 1.2.7. Dados $\mathcal{M},\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

i. $\mathcal{M}+\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$.

ii. $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] < 1$.

iii. Existe $c_0 > 0$ tal que, si $x\in\mathcal{M}$ e $y\in\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}$, entonces $\|x+y\| \geq c_0\|x\|$.

De hecho, la mejor constante para iii es $c_0 = s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]$.

Demostración. Podemos suponer que $\mathcal{M}\cap\mathcal{N} = \{0\}$, ya que $\mathcal{M}+\mathcal{N} = \mathcal{M}\oplus(\mathcal{N}\ominus\mathcal{M})$ y $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}\,]$. Observar que, por la Prop. 1.2.5,

$$\begin{aligned} c_0 \ &\stackrel{\text{def}}{=} \ \max\big\{c\geq 0 : \|x+y\| \geq c\|x\| \quad \text{para todo par} \quad x\in\mathcal{M},\ y\in\mathcal{N}\big\}\\ &= \ \inf\big\{\|x+y\| \ : \ x\in\mathcal{M}_1\,,\ y\in\mathcal{N}\big\} = \mathrm{d}\,(\mathcal{M}_1\,,\,\mathcal{N}) = s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]\ .\end{aligned}$$

Si $c_0 > 0$, y nos dan un sucesión $\mathcal{M}+\mathcal{N} \ni x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \in \overline{\mathcal{M}+\mathcal{N}}$, tenemos que

$$\|x_n - x_m\| \leq c_0^{-1}\|x_n + y_n - x_m - y_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0\ ,$$

es decir que la sucesión (x_n) es de Cauchy. Como $\mathcal{M} \sqsubseteq \mathcal{H}$, existe $x\in\mathcal{M}$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Por ello $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z - x \in \mathcal{N}$. Entonces $z\in\mathcal{M}+\mathcal{N}$.

Reciprocamente, si $\mathcal{M}\oplus\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$, la proyección $P_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$ de $\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}$ sobre $\mathcal{M}$ dada por

$$P_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}(x+y) = x\ , \qquad \text{para} \qquad x\in\mathcal{M} \qquad \text{e} \qquad y\in\mathcal{N}$$

es acotada (esto es la Ec. (1.1), que necesita que el dominio $\mathcal{M}\oplus\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$ para que sea un Hilbert). Por ende, podemos tomar $c_0 = \|P_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}\|^{-1} > 0$. $\square$

Corolario 1.2.8 (Ljance-Ptak)**.** Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$, tales que $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$. Tomemos la proyección oblicua $P_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} \in L(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{M}$ con $\ker P_{\mathcal{M}/\mathcal{N}} = \mathcal{N}$. Luego

$$\|P_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}\| = \Big(1 - \|P_{\mathcal{M}}\, P_{\mathcal{N}}\|^2\Big)^{-1/2} = \Big(1 - c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]\Big)^{-1/2} = s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]^{-1} \ . \tag{1.4}$$

Demostración. La fórmula (1.4) se deduce de la prueba anterior. □

1.3 Seudoinversas

Definición 1.3.1. Dados $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, decimos que B es *seudoinversa* de A si

$$ABA = A \quad \text{y} \quad BAB = B \ .$$

Llamaremos $SI(A) = \{B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1) :\ B \text{ es seudonversa de } A\}$. △

Teorema 1.3.2. Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

1. Si $B \in SI(A)$, entonces
   (a) AB es un proyector (oblicuo) con $R(AB) = R(A)$.
   (b) BA es un proyector (oblicuo) con $\ker(BA) = \ker A$.
2. Se tiene que $R(A) \sqsubseteq \mathcal{H}_2$ si y sólo si $SI(A) \neq \varnothing$.
3. En tal caso, para cada par de proyectores $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_2)$, $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_1)$ tales que

   $$R(P) = R(A) \quad \text{y} \quad \ker Q = \ker A \ ,$$

   existe un único $B \in SI(A)$ tal que $AB = P$ y $BA = Q$.

Demostración.

1. Sea $B \in SI(A)$. Entonces

   $$(BA)^2 = BABA = BA \quad \text{y} \quad (AB)^2 = ABAB = AB.$$

   Es claro que $R(AB) \subseteq R(A)$. Pero también $R(A) = R(ABA) \subseteq R(AB)$. Por otra parte, $\ker A \subseteq \ker BA \subseteq \ker ABA = \ker A$.
2. Si $B \in SI(A)$, entonces $R(A) = R(AB) \sqsubseteq \mathcal{H}_2$, porque es la imagen de un proyector. La recíproca se deducirá del item 3, aplicado a los proyectores $P = P_{R(A)}$ y $Q = I - P_{\ker A}$.
3. Si $R(A) \sqsubseteq \mathcal{H}_2$, y nos dan dos proyectores oblicuos $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_2)$ y $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_1)$ tales que $R(P) = R(A)$ y $\ker Q = \ker A$, llamemos $\mathcal{S} = \ker P$ y $\mathcal{T} = R(Q) \sqsubseteq \mathcal{H}_1$.

   Nos queda la descomposición $\mathcal{H}_1 = \ker A \oplus \mathcal{T}$, y por ende $A\big|_{\mathcal{T}} \in L(\mathcal{T}\,,\,R(A)\,)$ es inversible. Llamemos $B_0 \in L(R(A)\,,\,\mathcal{T})$ a su inversa, que es acotada por el Teorema de la función inversa (TFI, se usa que ambos subespacios son cerrados para ser completos). Definamos ahora el operador lineal

$$B : \mathcal{H}_2 = \mathcal{S} \oplus R(A) \to \ker A \oplus \mathcal{T} = \mathcal{H}_1 \quad \text{dado por} \quad B(x \oplus y) = B_0\, y \ , \tag{1.5}$$

para $x \in \mathcal{S}$ and $y \in R(A)$. Observar que $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. En efecto, tenemos que $\|B\| \le \|B_0\| \, \|P\| < \infty$, ya que $B(z) = B_0(Pz)$ para todo $z \in \mathcal{H}_2$.

Cálculos elementales muestran que este $B \in SI(A)$, $AB = P$ y $BA = Q$. Veamos ahora la unicidad: Si $C \in SI(A)$ también cumple que $AC = P$ y $CA = Q$, entonces podemos hacer $C = C(AC) = CP = CAB = QB = BAB = B$. $\square$

Definición 1.3.3. Dado $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ con rango cerrado, se llama $A^\dagger \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ al único elemento de $SI(A)$ tal que $A^\dagger A$ y $AA^\dagger$ son proyectores autoadjuntos. $A^\dagger$ es conocida como la seudoinversa de Moore-Penrose de A. $\triangle$

Corolario 1.3.4. Dado $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, se verifican:

1. $R(T)$ es cerrado si y sólo si $R(T^*)$ es cerrado.
2. $SI(T^*) = \{B^* : B \in SI(T)\}$.
3. $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$.

Demostración. La igualdad $SI(T^*) = \{B^* : B \in SI(T)\}$ se deduce directamente de la definición de seudoinversa. Luego la primera parte es consequencia del Teorema 1.3.2. La última, del hecho de que $(T^\dagger)^*$ verifica las condiciones de la definición de $(T^*)^\dagger$. $\square$

La siguiente Proposición, cuya prueba es semi trivial, es interesante porque describe en qué sentidos $T^\dagger b$ es la mejor solución posible para la ecuación $Tx = b$.

Proposición 1.3.5. Sea $T \in L(\mathcal{H}_1 \, , \mathcal{H}_2)$ tal que $R(T) \sqsubseteq \mathcal{H}_2$, y sea $b \in \mathcal{H}_2$. Entonces el vector $x = T^\dagger b \in \mathcal{H}_1$ cumple las siguientes condiciones:

1. Si $b_0 = Tx$, entonces $\|b - b_0\| = \mathrm{d}\,(b\,,\, R(T)\,)$, o sea que $b_0 = Tx$ es lo más cerca de "b" que se puede llegar a través de T.
2. El vector x es el más chico de los que van por T a b_0. O sea que

$$\|x\| = \min \big\{ \ \|z\| \ : \ z \in \mathcal{H}_1 \quad \text{y} \quad Tz = b_0 \ \big\} \ .$$

Demostración. Es otra manera de decir que $TT^\dagger = P_{R(T)}$ y $T^\dagger T = I - P_{N(T)}$. $\square$

Proposición 1.3.6. Sea $T \in L(\mathcal{H}_1 \, , \mathcal{H}_2)$ tal que $R(T) \sqsubseteq \mathcal{H}_2$. Entonces

$$\|T^\dagger\| = \min\{ \ \|B\| : B \in SI(T) \ \} \ .$$

Demostración. Sea $B \in SI(T)$. Dado $y \in R(T)$, sea $x \in N(T)^\perp$ el único tal que $Tx = y$. Entonces $x = T^\dagger Tx = T^\dagger y$. Pero también tenemos que $y = Tx = TBTx = T(By)$, y por lo tanto $By - x \in N(T)$. Esto muestra, vía Pitágoras, que

$$\|By\|^2 = \|x + (By - x)\|^2 \geq \|x\|^2 = \|T^\dagger y\|^2 \ .$$

Si me dan ahora un $z \in \mathcal{H}_2$ con $\|z\| = 1$, lo parto $z = y + w$ con $y \in R(T)$ y $w \in R(T)^\perp$. Entonces tengo que $\|y\| \leq 1$ y que $\|T^\dagger y\| \leq \|By\|$ (por lo de arriba). Por lo tanto

$$\|T^\dagger z\| = \|T^\dagger (TT^\dagger z)\| = \|T^\dagger y\| \leq \|By\| \leq \|B\| \, \|y\| \leq \|B\| \ .$$

Tomando supremo sobre tales z, me da que $\|T^\dagger\| \leq \|B\|$. $\square$

Observación 1.3.7. Sea $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)$, que es un proyector oblicuo tal que $N(Q)^\perp = R(Q^\dagger) = \operatorname{span}\{e_1\}$. Tomemos $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $PQ = P$ y $QP = Q$, se tiene que $P \in SI(Q)$, pero no es la seudoinversa de Moore-Penrose de T. Sin embargo, $1 = \|P\|$ es menor que la norma de cualquier otro proyector sobre $\operatorname{span}\{e_1\}$. ¿Qué pasa?

Ejemplos 1.3.8.

1. Si $A \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})$, entonces $SI(A) = \{A^{-1}\}$. En particular, $A^\dagger = A^{-1}$.

2. Si $A \in L(\mathcal{H}_1 \, , \mathcal{H}_2)$ es suryectivo, entonces $SI(A)$ coincide con el conjunto de inversas a derecha de A, porque si $AB = I$, entonces $ABA = A$ y $BAB = B$. La recíproca vale por la Prop. 1.3.2. Es fácil ver además que $A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$.

3. En cambio, si A es inyectivo y $R(A) \sqsubseteq \mathcal{H}_2$, se tiene que

$$SI(A) = \{B \in L(H_2 \, , H_1) : BA = I\} \quad \text{ y } \quad A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^* \ .$$

   Esto se deduce de que A^* es suryectivo.

4. Si $U \in L(\mathcal{H})$ es una isometría parcial (i.e., U es isométrico en $(\ker U)^\perp$), entonces se tiene que $U^\dagger = U^*$.

5. Si $A \in L(\mathcal{H})$ es normal y $R(A) \sqsubseteq \mathcal{H}$, entonces A conmuta con $A^\dagger$. Más en detalle, si llamamos $A_0 = A\big|_{R(A)} \in L(R(A)\,)$, se tiene que $A_0 \in \mathcal{G}l(R(A)\,)$,

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R(A) \\ \ker A \end{matrix} \quad \text{ y } \quad A^\dagger = \begin{bmatrix} A_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R(A) \\ \ker A \end{matrix} \ . \tag{1.6}$$

6. Si $A \in L(\mathcal{H})$ y $S \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})$, entonces

$$SI(SAS^{-1}) = \{SBS^{-1} : B \in SI(A)\},$$

   pero no es fácil averiguar quién es $(SAS^{-1})^\dagger$ (si es que existe).

7. Si $A \in L(\mathcal{H})$ tiene $R(A) \sqsubseteq \mathcal{H}$, y $V, W \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, entonces $(VAW)^\dagger = W^* A^\dagger V^*$.

8. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una matriz diagonal $A = \operatorname{diag}(x)$ para cierto $x \in \mathbb{C}^n$, entonces $A^\dagger = \operatorname{diag}\big(x^\dagger\big)$, donde $x^\dagger \in \mathbb{C}^n$ esta dado por $x_i^\dagger = x_i^{-1}$ si $x_i \neq 0$ o $x_i^\dagger = 0$ si $x_i = 0$.

9. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $\operatorname{rk}(A) = k$. Si $V, W \in \mathcal{U}(n)$ verifican $A = W^* \Sigma(A) V$, entonces,

$$A^\dagger = V^* \Sigma(A)^\dagger W = V^* \operatorname{diag}\big(s_1(A)^{-1}, \dots, s_k(A)^{-1}, 0, \dots, 0\big)\, W \ .$$

   Esto se deduce de los dos items anteriores. △

Dados $A, B \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})$, suele ser muy útil (sobre todo para hacer acotaciones) la identidad

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \ .$$

Con las seudoinversas de Moore Penrose no vale una fórmula tan linda, pero algo hay:

Proposición 1.3.9. Sean $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, ambos con rango cerrado. Entonces:

$$B^\dagger - A^\dagger = -B^\dagger(B - A)A^\dagger + (I - B^\dagger B)(B - A)(A^\dagger)^2 + (B^\dagger)^2(B - A)(I - AA^\dagger).$$

En particular, si $R(B) \subseteq R(A)$,

$$B^\dagger - A^\dagger = -B^\dagger(B - A)A^\dagger + (I - B^\dagger B)(B - A)(A^\dagger)^2.$$

Demostración. Ejercicio. □

1.4 Módulo mínimo

Definición 1.4.1. Dado $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, llamaremos módulo mínimo de T al número

$$\gamma(T) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \ \Big\{ \ \|Tx\| \ : \ x \in \ker(T)^\perp, \ \|x\| = 1 \ \Big\} \ . \tag{1.7}$$

Cuando $T = 0$, usaremos la convención $\gamma(T) = \infty$. △

Proposición 1.4.2. Sea $T \in L(\mathcal{H}_1 \, , \, \mathcal{H}_2)$.

1. Si T es inversible, se tiene que $\gamma(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$.

2. Si $B \in L(\mathcal{H}_2 \, , \, \mathcal{H}_3)$ es inversible, entonces el $\gamma(BT)$ se acota por ambos lados:

$$\|B^{-1}\|^{-1} \ \gamma(T) = \gamma(B)\gamma(T) \leq \gamma(BT) \leq \|B\|\gamma(T) \ . \tag{1.8}$$

Demostración. Si T es invertible, entonces $N(T) = \{0\}$ y, por definición,

$$\gamma(T) = \min\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \;= \Big(\max\{\ \|y\| : \|Ty\| = 1\}\Big)^{-1}$$

$$= \Big(\max\{\ \|T^{-1}z\| : \|z\| = 1\}\Big)^{-1} = \|T^{-1}\|^{-1} \ .$$

Por otro lado, si ahora B es el inversible, tenemos que $N(BT) = N(T)$. Como $N(B) = \{0\}$, cualquiera sea el $x \in N(T)^\perp = N(BT)^\perp$ (no importa donde caiga Tx), tenemos que

$$\gamma(B)\|Tx\| \le \|BTx\| \le \|B\|\ \|Tx\| \ .$$

Tomando ínfimo en $(N(T)^\perp)_1$, obtenemos que $\gamma(B)\gamma(T) \le \gamma(BT) \le \|B\|\gamma(T)$. □

Proposición 1.4.3. Sea $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Entonces

1. Se tiene la equivalencia $R(T) \sqsubseteq \mathcal{H}_2 \iff \gamma(T) > 0$.
2. En tal caso, $\gamma(T) = \gamma(T^*) = \|T^\dagger\|^{-1}$.

Demostración. La primera parte es una cuenta usual de operadores, y se deja como ejercicio. Pasa por ver que $\gamma(T) > 0 \iff T|_{(\ker T)^\perp}$ es acotado inferiormente. Si ahora asumimos que $R(T) \sqsubseteq \mathcal{H}_2$ y que $T \ne 0$, el hecho de que $T^\dagger\, T = P_{\ker(T)^\perp}$ implica que

$$T^\dagger\big|_{R(T)} : R(T) \to \ker(T)^\perp \qquad \text{es la inversa de} \qquad T\big|_{\ker(T)^\perp} : \ker(T)^\perp \to R(T) \ .$$

Por lo tanto, la Prop. 1.4.2 nos asegura que

$$\gamma(T) = \gamma\left(T\big|_{\ker(T)^\perp}\right) = \left\|T^\dagger\big|_{R(T)}\right\|^{-1} \ .$$

Pero como $\ker T^\dagger = R(T)^\perp$, tenemos que $\|T^\dagger\big|_{R(T)}\| = \|T^\dagger\|$. Finalmente, el Cor. 1.3.4 dice que $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$, por lo que

$$\gamma(T^*) = \|(T^*)^\dagger\|^{-1} = \|(T^\dagger)^*\|^{-1} = \|T^\dagger\|^{-1} = \gamma(T) \ ,$$

como queríamos demostrar. □

Proposición 1.4.4. Sean A y $B \in L(\mathcal{H})^+$ tales que $0 \ne A \le B$ pero $R(A) = R(B) \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces $\gamma(A) \le \gamma(B)$. Además se tiene que

$$R(A) \sqsubseteq \mathcal{H} \implies \gamma(A) = \min\big\{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \ne 0\big\} \ . \tag{1.9}$$

Demostración. El hecho de que $\mathcal{S} = R(A) = R(B) \sqsubseteq \mathcal{H}$ dice que $\mathcal{S}^\perp = \ker A = \ker B$ y que

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{S} \\ \ker A \end{array} \quad , \quad B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{S} \\ \ker B \end{array} \ .$$

Además, se tiene que $A_0 \le B_0$ ambos en $\mathcal{G}l(\mathcal{S})^+$. En tal caso es sabido que

$$0 < B_0^{-1} \le A_0^{-1} \implies \gamma(A) = \gamma(A_0) = \|A_0^{-1}\|^{-1} \le \|B_0^{-1}\|^{-1} = \gamma(B_0) = \gamma(B) \ .$$

Pero $\sigma(A_0) = \big\{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \ne 0\big\}$ y $\|A_0^{-1}\| = \rho(A_0^{-1}) = \text{máx}\big\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}\big\}$. Al volver a invertir obtenemos la Ec. (1.9). □

Observación 1.4.5. Si no asumimos la hipótesis de que $R(A) = R(B)$, en general es falso que $0 \le A \le B \implies \gamma(A) \le \gamma(B)$. Sugerimos pensar un contraejemplo (debería salir rapidito, no vale $A = 0$). $\triangle$

Corolario 1.4.6. Sea $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Entonces

$$\gamma(T) = \gamma(\,|T|\,) = \gamma(T^* T)^{1/2} \ .$$

Demostración. Sea $T = U|T|$ la DP de T. Recordemos que

$$\|T\,x\| = \|\,|T|\,x\| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{H}_1 \implies \ker T = \ker |T| \ .$$

Luego la igualdad $\gamma(T) = \gamma(\,|T|\,)$ se deduce de las definiciones. Por otra parte,

$$T^*T = |T|^2 \implies \sigma(T^* T) = \sigma(\,|T|\,)^2 \ .$$

Entonces, si $R(\,|T|\,) \sqsubseteq \mathcal{H}_1$, podemos deducir la igualdad $\gamma(T^* T) = \gamma(\,|T|\,)^2$ de la Ec. (1.9). En caso contrario ambos dan 0. $\square$

Ejercicio 1.4.7.

1. Sea $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ que no es inversible. Probar que

$$R(A) \sqsubseteq \mathcal{H} \iff \text{el} \quad 0 \in \sigma(A) \quad \text{es punto aislado} \ . \tag{1.10}$$

2. Sea ahora $T \in L(\mathcal{H})$ no inversible. Probar que

$$R(T) \sqsubseteq \mathcal{H} \iff 0 \quad \text{es aislado en} \quad \sigma(\,|T|\,) \ . \tag{1.11}$$

En realidad la Ec. (1.10) vale para todo $T \in L(\mathcal{H})$ (sin pedir que $T^* = T$). Pero la prueba es difícil con las herramientas que tenemos acá. Probarlo para T normal. $\triangle$

Ejemplos 1.4.8. 1. Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ y $T \in L(\mathcal{H})$ dado por

$$T(x) = \big(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots\big) \ , \quad x \in \ell^2(\mathbb{N}) \ . \tag{1.12}$$

Es evidente que $\|T\| = 1$ y que $\ker T = \{0\}$. Además, si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$, tenemos que

$$\|Te_n\| = \Big\|\frac{e_n}{n}\Big\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies \gamma(T) = 0 \ .$$

Por lo tanto $R(T) \not\sqsubseteq \ell^2(\mathbb{N})$.

2. Tomemos los subespacios $\mathcal{M} = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \{0\} \sqsubseteq \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ y

$$\mathcal{N} = \mathrm{Gr}(T) = \big\{(x, Tx) : x \in \ell^2(\mathbb{N})\big\} \ \sqsubseteq \ \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N}) \ ,$$

donde T es el operador definido en (1.12). El hecho de que $\ker T = \{0\}$ dice que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] \ &= \ \mathrm{d}\,(\mathcal{M}_1\,, \mathcal{N}) = \inf_{(x,0)\in\mathcal{M}_1} \mathrm{d}\,(\,(x,0), \mathrm{Gr}(T)\,) \\ &\le \ \inf_{(x,0)\in\mathcal{M}_1} \|(0,Tx)\| = \inf_{x\in\mathcal{H}_1} \|Tx\| = \gamma(T) = 0 \ . \end{aligned}$$

Esto nos dice que $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = 1$, y por ende $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ no es un subespacio cerrado, aunque ambos subespacios son cerrados y se cortan solo en $\{0\}$. $\triangle$

Proposición 1.4.9. Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$ tales que $P_{\mathcal{M}^\perp} P_{\mathcal{N}} \neq 0$ (o sea $\mathcal{N} \not\subseteq \mathcal{M}$). Entonces

$$\gamma(P_{\mathcal{M}^\perp} P_{\mathcal{N}}) = s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] \ .$$

Demostración. Llamemos $\mathcal{R} = \mathcal{M}^\perp$. Como $\ker(P_{\mathcal{R}} P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{N}^\perp \oplus (\mathcal{N} \cap \mathcal{M})$, se tiene que

$$\ker(P_{\mathcal{R}} P_{\mathcal{N}})^\perp = \mathcal{N} \cap (\mathcal{N} \cap \mathcal{M})^\perp = \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}.$$

Luego, por la Prop. 1.2.3 y la definición del módulo mínimo,

$$\gamma(P_{\mathcal{R}} P_{\mathcal{N}}) = \inf_{x\in(\mathcal{N}\ominus\mathcal{M})_1} \|P_{\mathcal{R}} x\| = \inf_{x\in(\mathcal{N}\ominus\mathcal{M})_1} \mathrm{d}\,(x,\,\mathcal{M}) = \mathrm{d}\,(\,(\mathcal{N}\ominus\mathcal{M})_1,\,\mathcal{M}) = s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] \ ,$$

donde su usa nuevamente que $\mathrm{d}\,(x,\,\mathcal{M}) = \|P_{\mathcal{M}^\perp}\, x\|$, para cualquier $x \in \mathcal{H}$. $\square$

El resultado anterior es interesante porque relaciona ajustadamente gamas y ángulos, pero lo es más aún porque tiene las siguientes importantes consecuencias:

Proposición 1.4.10. Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces

$$c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = c\,\big[\,\mathcal{M}^\perp\,,\,\mathcal{N}^\perp\,\big]\,.$$

Demostración. Sabemos, por la Prop. 1.4.3, que para cada $T \in L(\mathcal{H})$ se verifica que $\gamma(T) = \gamma(T^*)$. Luego, aplicando la Prop. 1.4.9, nos queda que

$$s\,\big[\,\mathcal{M}^\perp\,,\,\mathcal{N}^\perp\,\big] = \gamma(P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}^\perp}) = \gamma(\,(P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}^\perp})^*) = \gamma(P_{\mathcal{N}^\perp} P_{\mathcal{M}}) = s\,[\,\mathcal{N}\,,\,\mathcal{M}\,] = s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]\,.$$

Por lo tanto, también $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = c\,\big[\,\mathcal{M}^\perp\,,\,\mathcal{N}^\perp\,\big]$. En los casos en que la Prop. 1.4.9 no se puede aplicar (i.e. $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ o vive versa), el enunciado es trivial. $\square$

Proposición 1.4.11. Sean $A, B \in L(\mathcal{H})$ tales que $R(A)$ y $R(B)$ son cerrados. Entonces

$$R(AB) \sqsubseteq \mathcal{H} \quad \iff \quad c\,[\,\ker A\,,\,R(B)\,] < 1 \ .$$

Demostración. Si $AB = 0$ es obvio. Sinó, llamemos $\mathcal{M} = \ker A^\perp$ y $\mathcal{N} = R(B)$. Notar que $A\big|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to R(A)$ es un iso, porque $R(A) \sqsubseteq \mathcal{H}$. Luego, un subespacio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ cumple que $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{M} \iff A\big|_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) \sqsubseteq R(A) \iff A\big|_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) \sqsubseteq \mathcal{H}$. Por lo tanto,

$$R(AB) = A(\mathcal{N}) = A\big|_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})\,) \sqsubseteq \mathcal{H} \iff P_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}) = R(P_{\mathcal{M}}B) = R(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}) \sqsubseteq \mathcal{M} \ .$$

Pero por la Prop. 1.4.9 (que se puede aplicar porque $AB \neq 0 \implies P_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$),

$$\gamma(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}) = s\left[\,\mathcal{M}^\perp\,,\,\mathcal{N}\,\right] = s\,[\,\ker A\,,\,R(B)\,] > 0 \qquad \iff \qquad c\,[\,\ker A\,,\,R(B)\,] < 1 \ .$$

El resultado se sigue, ahora, de la Prop. 1.4.3. $\square$

A continuación daremos una generalización de la Prop. 1.4.9, que será muy útil más adelante. La prueba es parecida, aunque un poco más cuidadosa.

Proposición 1.4.12. Sean $T \in L(\mathcal{H}_1\,,\,\mathcal{H}_2)$ y $\mathcal{M} \sqsubseteq \mathcal{H}_1$ tales que $TP_{\mathcal{M}} \neq 0$. Entonces

$$\gamma(T)\ s\,[\,N(T)\,,\,\mathcal{M}\,] \leq \gamma(TP_{\mathcal{M}}) \leq \|T\|\ s\,[\,N(T)\,,\,\mathcal{M}\,]\,. \tag{1.13}$$

Demostración. Observar que $N(TP_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^\perp \perp \mathcal{M} \cap N(T)$. Luego

$$N(TP_{\mathcal{M}})^\perp = \mathcal{M} \cap (\mathcal{M} \cap N(T)\,)^\perp = \mathcal{M} \ominus (\mathcal{M} \cap N(T)\,) = \mathcal{M} \ominus N(T) \ .$$

Por lo tanto, si $x \in \mathcal{M} \ominus N(T)$ y $\|x\| = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|TP_{\mathcal{M}}x\| &= \|Tx\| = \|T(P_{N(T)^\perp}\,x)\| \\ &\geq \gamma(T)\|P_{N(T)^\perp}\,x\| = \gamma(T)\ \mathrm{d}\,(x, N(T)\,) \\ &\geq \gamma(T)\,s\,[\,N(T)\,,\,\mathcal{M}\,]\ \ ,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se deduce que $s\,[\,N(T)\,,\,\mathcal{M}\,] = \mathrm{d}\Big((\mathcal{M} \ominus N(T)\,)_1\,,\,N(T)\Big)$, como asegura la Prop. 1.2.5. Tomando mínimo sobre los vectores unitarios de $N(TP_{\mathcal{M}})^\perp$, deducimos que

$$\gamma(TP_{\mathcal{M}}) \geq \gamma(T)\ s\,[\,N(T)\,,\,\mathcal{M}\,]\ \ .$$

La otra desigualdad de (1.13) se deduce de que $\|Ty\| = \|TP_{N(T)^\perp}\,y\| \leq \|T\|\,\|P_{N(T)^\perp}\,y\|$ para todo $y \in \mathcal{H}_1$, de que $N(TP_{\mathcal{M}}) = N(P_{N(T)^\perp}\,P_{\mathcal{M}})$ y de la Prop. 1.4.9. $\square$

Observación 1.4.13. Con las mismas ideas puede probarse la siguiente fórmula, que generaliza la Prop. 1.4.12: Dados $A \in L(\mathcal{H}_2\,,\,\mathcal{H}_3)$ y $B \in L(\mathcal{H}_1\,,\,\mathcal{H}_2)$ tales que $AB \neq 0$,

$$\gamma(A)\gamma(B)\ s\,[\,\ker A\,,\,R(B)\,] \leq \gamma(AB) \leq \|A\|\,\|B\|\ s\,[\,\ker A\,,\,R(B)\,]\,.$$

En particualr, si A y B son isometrías parciales, (o sea $\gamma(A) = \|A\| = 1 = \gamma(B) = \|B\|$), entonces $s\,[\,\ker A\,,\,R(B)\,] = \gamma(AB)$. $\triangle$

Antes de leer el siguiente resultado, sugerimos hacer unos dibujos (no en este papel): Primero dos rectas (por el origen) $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^2$. Luego agarrar un punto, e ir aplicándole sucesivamente $P_{\mathcal{N}}$ y $P_{\mathcal{M}}$. Se verá que uno se va acercando a cero, más despacito en tanto el ángulo entre $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ sea más pequeño. Ahora, extrapolar este dibujo al caso en que $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ son dos planos en R^3. Ahí adonde uno se acerca es a la recta $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$, y moviéndose siempre dentro de un plano ortogonal a ella. Ahora sí, leamos la siguiente generalización (cuantitativa) de sus dibujos:

Proposición 1.4.14. Sean P y Q dos proyectores ortogonales en $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Entonces

$$\|(PQ)^k - P \wedge Q\| = c\,[\,R(P)\,,\,R(Q)\,]^{2k-1} \ , \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N} \ ,$$

donde $P \wedge Q$ es la proyección ortogonal sobre $R(P) \cap R(Q)$. En particular,

$$(PQ)^k \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|} P \wedge Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad c\,[\,R(P)\,,\,R(Q)\,] < 1 \ .$$

Demostración. Sean $E = P - P \wedge Q = P(I - P \wedge Q)$ y $F = Q - P \wedge Q$. Observar que $I - P \wedge Q$ comnuta tanto con P como con Q (porque $P \wedge Q$ lo hace). Luego,

$$\begin{aligned}\|(PQ)^k - P \wedge Q\|^2 &= \|(PQ)^k(1 - P \wedge Q)\|^2 = \|(EF)^k\|^2 \\ &= \|(FE)^k(EF)^k\| = \|(FEF)^{2k-1}\| = \|FEF\|^{2k-1}.\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la Prop. 1.2.3 y el hecho de que $R(E) \cap R(F) = \{0\}$, se tiene que $\|FEF\| = \|EF\|^2 = c\,[\,R(E)\,,\,R(F)\,]^2 = c\,[\,R(P)\,,\,R(Q)\,]^2$. Por lo tanto

$$\|(PQ)^k - P \wedge Q\|^2 = c\,[\,R(P)\,,\,R(Q)\,]^{2(2k-1)} \ ,$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Ejercicio 1.4.15. Sean $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$ tales que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \{0\}$ y $c\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] < 1$. Supongamos que tenemos un subespacio

$$\mathcal{V} \sqsubseteq \mathcal{N} \quad \text{tal que} \quad \mathcal{V} \cap \mathcal{M} = \{0\} \quad \text{pero} \quad \mathcal{V} \oplus \mathcal{M} = \mathcal{N} + \mathcal{M} \ .$$

Probar que entonces se tiene

$$s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,] = s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N} \ominus \mathcal{M}\,] \geq s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{V}\,] \ .$$

Observar que $\mathcal{N} \ominus \mathcal{M}$ es un tal $\mathcal{V}$. Pero lo interesante es la desigualdad para otros $\mathcal{V}$. Se podría refrasear el ejercicio como sigue: $s\,[\,\mathcal{M}\,,\,\mathcal{N}\,]$ es el máximo de los senos entre $\mathcal{M}$ y los suplementos de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ que están contenidos en $\mathcal{N}$.

Sug: Probar primero que si $x \in \mathcal{N}$ entonces, como $\mathcal{N} = \mathcal{N} \cap \mathcal{M} \perp \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}$, se tiene que

$$x = P_{\mathcal{N}\cap\mathcal{M}}\,x + P_{\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}}\,x \in P_{\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}}\,x + \mathcal{M} \implies \mathrm{d}\,(x\,,\,\mathcal{M}) = \mathrm{d}\,(P_{\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}}\,x\,,\,\mathcal{M}) \ .$$

Luego usar la Prop. 1.2.5 para calcular los senos. También debe usarse que

$$\mathcal{V}_1 \ni y \mapsto \frac{P_{\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}}\,y}{\|P_{\mathcal{N}\ominus\mathcal{M}}\,y\|} \in (\mathcal{N} \ominus \mathcal{M})_1 \ ,$$

además de bien definida es biyectiva (sobre todo que es sobre). $\triangle$

Capítulo 2

Complementos de Schur de operadores positivos

2.1 Factorización e inclusiones de rangos.

El siguiente resultado, extraido del trabajo [20] de R. Douglas de 1966, será de una herramienta escencial en todo lo que sigue de estas notas, en las que se lo citará (muchísimas veces) como *el Teorema de Douglas* .

Teorema 2.1.1 (Douglas)**.** Sean $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ y $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $R(A) \subseteq R(B)$.

2. Existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que $AA^* \leq \lambda\, BB^*$.

3. Existe $C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $A = BC$.

En tal caso, exite un único

$$C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \quad \text{tal que} \quad A = BC \quad \text{y} \quad R(C) \subseteq \overline{R(B^*)} = \ker B^{\perp} \ .$$

Esta solución satisface, además, las siguentes propiedades:

i) $\ker C = \ker A$

ii) $\|C\|^2 = \min\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : \ AA^* \leq \ \lambda\, BB^*\}$

Demostración.

3 ⇒ 1) Es claro.

3 ⇒ 2) Como todo $D \in L(\mathcal{H}_3)^+$ verifica que $D \leq \|D\| I$, se tiene que

$$AA^* = BCC^*B^* \leq \|CC^*\| BB^* \ .$$

2 ⇒ 3) La condición $AA^* \leq \lambda BB^*$ es equivalente a que $\|A^*x\| \leq \lambda^{1/2}\|B^*x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}_3$. En particular, $\ker(B^*) \subseteq \ker(A^*)$. Por lo tanto, es correcto definir

$$T : R(B^*) \to R(A^*) \quad \text{dado por} \quad T(B^*x) = A^*x \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{H}_3 \ .$$

Es claro que T está bien definido y es lineal. Como $\|A^*x\| \leq \lambda^{1/2}\|B^*x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}_3$, deducimos que T es acotado (con $\|T\| \leq \lambda^{1/2}$). Extendemos T (manteniendo su nombre) a $\overline{R(B^*)}$ por continuidad y luego a todo $\mathcal{H}_2$ como cero en $R(B^*)^\perp$. Queda que $T \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, y sigue valiendo que $\|T\| \leq \lambda^{1/2}$. Es claro que $A^* = TB^*$, lo cual muestra que el operador que estamos buscando es $C = T^* \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Notar que este C que construimos cumple $R(C) \subseteq \ker T^{\ \perp} \subseteq \overline{R(B^*)} = \ker B^{\ \perp}$.

1 ⇒ 3) La condición $R(A) \subseteq R(B)$ permite asegurar que para todo $x \in \mathcal{H}_1$ existe un único $y \in \ker B^{\ \perp}$ tal que $Ax = By$. Definamos $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ como $Cx = y$. Para ver que $C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ basta verificar que su gráfico es cerrado. Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en el gráfico de C tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ e $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Luego

$$Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} By_n = By$$

es decir (x, y) pertenece al gráfico de C.

Es claro que la inclusión $R(C) \subseteq \overline{R(B^*)} = \ker B^{\ \perp}$ identifica univocamente al operador C, puesto que $BC = A$ y B es inyectivo en $\ker B^{\ \perp}$. Observar que tanto el C construido en $(1 \Rightarrow 3)$ como el construido en $(2 \Rightarrow 3)$ cumplen esa inclusión, y por ende coinciden.

Verifiquemos ahora este C satisface (i) y (ii). Como, $A = BC$, vemos que $\ker C \subseteq \ker A$. Pero si $x \in \ker A$, entonces el único $y \in \ker B^{\ \perp}$ tal que $By = Ax = 0$ es $y = 0$, por lo que $Cx = 0$ (el C de $1 \Rightarrow 3$). Esto muestra que $\ker A \subseteq \ker C$.

Por otro lado, vimos en $(2 \Rightarrow 3)$ que $\|C\| = \|T\| \leq \lambda^{1/2}$, para todo λ tal que $AA^* \leq \lambda BB^*$. La otra desigualdad es clara, puesto que $AA^* = BCC^*B^* \leq \|C\|^2BB^*$. □

Corolario 2.1.2. Sea $A \in L(\mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2)$. Entonces $R(|A^*|) = R(A)$.

Demostración. Dado que $AA^* = |A^*|^2$, usando la equivalencia entre (1) y (2) del Teo. 2.1.1 se tiene que $R(|A^*|) = R(A)$. □

Definición 2.1.3. Sean $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ y $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ tales que $R(A) \subseteq R(B)$. Llamaremos **solución reducida** (o SR) de la ecuación $A = BX$ al único operador $C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $A = BC$ y $R(C) \subseteq \ker B^\perp$, que exhibe el Teo. 2.1.1. △

Observación 2.1.4. Sean $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ y $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ tales que $R(A) \subseteq R(B)$. Sea $P \in L(\mathcal{H}_2)$ la proyección ortogonal sobre $\ker B^\perp$. Entonces, para todo $C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $BC = A$, se tiene que PC es la SR de la ecuación $BX = A$. En efecto, como $BP = B$ y $R(PC) \subseteq R(P)$, la prueba es inmediata. Observar que esto dice que la SR el la más chica (en norma) de todas las soluciones de la ecuación $BX = A$ (porque $\|P\| \leq 1$). △

Ejercicios 2.1.5. Sean $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ y $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$.

1. Probar que
$$R(A) + R(B) = R(\,(AA^* + BB^*)^{1/2}) \ .$$

2. Supongmos que $R(A) \subseteq R(B)$, sea C la SR de la ecuacón $BX = A$, y sea D otra solución. Entonces
$$\|C\xi\| \leq \|D\xi\| \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathcal{H}_1 \ .$$
En particular, $\|C\|$ es mínima entre dichas soluciones.

3. Supongmos que $R(A) \subseteq R(B) \sqsubseteq \mathcal{H}_3$. Sea $B^\dagger$ la seudoinversa de Moore-Penrose de B (ver Def. 1.3.3). Entonces la SR de la ecuación $BX = A$ es $C = B^\dagger A$.

4. Observar que $B^\dagger$ es la SR de la ecuación $BX = P_{R(B)}$.

5. Más generalmente, si P es un proyector (oblicuo) tal que $R(P) = R(B)$ y C es la SR de $BX = P$, entonces $C \in SI(B)$ y CB es un proyector ortogonal.

6. Usar lo anterior para dar otra prueba de la Prop. 1.3.6.

2.2 Operadores definidos positivos.

Proposición 2.2.1. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces su raiz $A^{1/2}$ cumple que

1. Núcleos: $\ker A = \ker A^{1/2}$.

2. Imágenes: $R(A) \subseteq R(A^{1/2}) \subseteq \overline{R(A)} \quad (= \ker A^\perp)$.

3. Si $R(A) \not\sqsubseteq \mathcal{H}$ (o sea no es cerrado), entonces $R(A) \neq R(A^{1/2}) \neq \overline{R(A)}$.

Demostración. Los ítems 1 y 2 son inmediatos. Supongamos que $R(A) = R(A^{1/2})$. Fijado un $x \in (\ker A)^\perp$, debe existir un $y \in (\ker A)^\perp$ tal que $A^{1/2}\, x = A\, y = A^{1/2}\, (A^{1/2}\, y)$.

Como también $A^{1/2}\, y \in R(A^{1/2}) \subseteq (\ker A)^\perp$ y $A^{1/2}$ es mono allí, deducimos que $A^{1/2}\, y = x$. Pero esto implica que $R(A) = R(A^{1/2}) = (\ker A)^\perp \sqsubseteq \mathcal{H}$. En cambio, si $R(A^{1/2}) \sqsubseteq \mathcal{H}$, a la Prop. 1.4.11 le sobra para implicar que también $R(A) \sqsubseteq \mathcal{H}$. □

Corolario 2.2.2. Sean $A\, ,\, B \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Luego si
$$A \leq B \quad \text{y} \quad R(B) \subseteq \mathcal{S} \implies R(A) \subseteq \mathcal{S} \ . \tag{2.1}$$

Demostración. Apliquemos Douglas 2.1.1 a $A^{1/2}$ y $B^{1/2}$. Como $A \leq B$ deducimos que
$$R(A) \subseteq R(A^{1/2}) \subseteq R(B^{1/2}) \subseteq \mathcal{S} \ ,$$
donde el último $\subseteq$ surge de que $R(B^{1/2}) \subseteq \overline{R(B)} \subseteq \mathcal{S}$, porque $\mathcal{S}$ era cerrado. □

Proposición 2.2.3. Sea $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$, y consideremos un operador

$$M = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array} \in L(\mathcal{H})^+ \ .$$

Entonces $R(B) \subseteq R(D^{1/2})$ y $R(B^*) \subseteq R(A^{1/2})$.

Demostración. Como $A \in L(\mathcal{S})^+$, tenemos que $A + I_\mathcal{S} \in \mathcal{G}l(\mathcal{S})^+$. Con un pequeño abuso de notación, llamemos $(A + I_\mathcal{S})^{-1}$ a su inversa en $L(\mathcal{S})$. Por cuentas elementales tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \begin{bmatrix} I_\mathcal{S} & 0 \\ -B(A+I_\mathcal{S})^{-1} & I_{\mathcal{S}^\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+I_\mathcal{S} & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\mathcal{S} & -(A+I_\mathcal{S})^{-1}B^* \\ 0 & I_{\mathcal{S}^\perp} \end{bmatrix} \\ &= \ \begin{bmatrix} A+I_\mathcal{S} & 0 \\ 0 & D - B(A+I_\mathcal{S})^{-1}B^* \end{bmatrix} \implies B(A+I_\mathcal{S})^{-1}B^* \leq D \ . \end{aligned}$$

Por el Teo. 2.1.1, deducimos que $R(B) = R(B(A + I_\mathcal{S})^{-1/2}) \subseteq R(D^{1/2})$. El hecho de que $R(B^*) \subseteq R(A^{1/2})$ se prueba usando lo anterior para $\mathcal{S}^\perp$ en vez de $\mathcal{S}$. □

Proposición 2.2.4. Sean $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$ y $M = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array} \in L(\mathcal{H})^+$. Luego, si

$$C \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp) \quad \text{es la SR de} \quad B = D^{1/2}X \implies A \geq C^*C \quad \text{en} \quad L(\mathcal{S}) \ .$$

Más aún, para todo $x \in \mathcal{S}$, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}^\perp$ tal que

$$\big\langle\, (A - C^*C)\, x \,,\, x \,\big\rangle = \lim_{n\in\mathbb{N}} \left\langle M \begin{bmatrix} x \\ y_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle \ . \tag{2.2}$$

Demostración. Obsevar que $M = \begin{bmatrix} A - C^*C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^*C & B^* \\ B & D \end{bmatrix}$. Recordemos que, por ser C la SR de $B = D^{1/2}X$, se tiene que $R(C) \subseteq \overline{R(D^{1/2})}$. Luego, para cada $x \in \mathcal{S}$, existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}^\perp$ tal que $D^{1/2}y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -Cx$. Como

$$\begin{bmatrix} C^*C & B^* \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C^* \\ 0 & D^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & D^{1/2} \end{bmatrix} ,$$

podemos deducir que

$$\left\langle \begin{bmatrix} C^*C & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle = \big\langle Cx + D^{1/2}y_n \,,\ Cx + D^{1/2}y_n \big\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ .$$

Por lo tanto la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple lo pedido en la Ec. (2.2). □

Ejercicio 2.2.5. Sea $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Consideremos la casimatriz $M = \begin{bmatrix} ? & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array}$. Supongamos que $D \in L(\mathcal{S}^\perp)^+$ y $R(B) \subseteq R(D^{1/2})$. Probar que se puede completar a la casimatriz M en el lugar $1,1$ de tal modo que quede una matriz en $L(\mathcal{H})^+$. △

El siguiente resultado ya fué visto para el caso de matrices. La prueba para operadores es algo más complicada:

Corolario 2.2.6. Sea $C \in L(\mathcal{H}_1\,,\,\mathcal{H}_2)$. Luego

$$\|C\| \le 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad M = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & C^* \\ C & I_{\mathcal{H}_2} \end{bmatrix} \in L(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)^+ \ .$$

Demostración. La ida se prueba igual que en dimensión finita: si $\|C\| \le 1$, entonces para todo $z = (x\,,\,y) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ se tiene que

$$\langle Mz\,,\,z\rangle = \big\langle\,(x + C^*\,y\,,\,C\,x + y)\,,\,(x\,,\,y)\,\big\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle Cx\,,\,y\rangle \ .$$

Pero como $2\ \mathrm{Re}\,\langle Cx\,,\,y\rangle \ge -2\,|\,\langle Cx\,,\,y\rangle\,| \ge -2\,\|x\|\ \|y\|$, deducimos que $\langle Mz\,,\,z\rangle \ge 0$. Sinó

$$0 \le \begin{bmatrix} 0 & C^* \\ 0 & I_{\mathcal{H}_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & I_{\mathcal{H}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^*C & C^* \\ C & I_{\mathcal{H}_2} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}_1} & C^* \\ C & I_{\mathcal{H}_2} \end{bmatrix} \ .$$

Para probar la recíproca, observar que C misma es la SR de la ecuación $I_{\mathcal{H}_2}^{1/2}\,X = C$. Si $M \in L(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)^+$, la Prop. 2.2.4 asegura que $C^*C \le I_{\mathcal{H}_1}$, o sea que $\|C\| \le 1$. $\square$

Teorema 2.2.7. Sea $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$, y sea $M = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix} \end{array} \in L(\mathcal{H})$. Entonces $M \in L(\mathcal{H})^+$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

1. $A \in L(\mathcal{S})^+$ y $D \in L(\mathcal{S}^\perp)^+$.
2. Existe una **contracción** $C \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp)$ tal que $B = D^{1/2}CA^{1/2}$.

Demostración. Si se cumplen las condiciones pedidas, vemos que

$$M = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & D^{1/2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{\mathcal{S}} & C^* \\ C & I_{\mathcal{S}^\perp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & D^{1/2} \end{bmatrix} \in L(\mathcal{H})^+ \ ,$$

por el Cor. 2.2.6. Si asumimos que $M \ge 0$, es claro que $A \in L(\mathcal{S})^+$ y $D \in L(\mathcal{S}^\perp)^+$.

Sea C_1 la SR de la ecuación $D^{1/2}X = B$ (que existe por la Prop. 2.2.3). Por la Prop. 2.2.4 se tiene que $C_1^*C_1 \le A$. Luego tomemos C_2 la SR de la ecuación $A^{1/2}X = C_1^*$.

Veamos que $C = C_2^*$ cumple lo pedido. En efecto, $\|C\| = \|C^*\| = \|C_2\| \le 1$, porque A acota a $C_1^*C_1$ con constante 1 (ver **ii** del Teorema de Douglas). Finalmente,

$$B = D^{1/2}\,C_1 = D^{1/2}\,C_2^*\,A^{1/2} = D^{1/2}\,C\,A^{1/2} \ . \qquad \square$$

Observación 2.2.8. En las condiciones del Teorema anterior, la contracción C no está, en general, unívocamente determinada. Pero sus únicos grados de libertad dependen de los núcleos de A y D. Por ejemplo, si $A > 0$ y $D > 0$, entonces la única solución posible es $C_0 = D^{-1/2}BA^{-1/2}$. La soluciuón C_0 obtenida en la prueba del Teorema (tomando dos veces soluciones reducidas) es mínima en varios sentidos, y puede caracterizarse por propiedades de núcleo e imagen, o bien obtenerse a partir de cualquier solución C de la ecuación $B = D^{1/2}XA^{1/2}$, tomando $C_0 = PCQ$, donde P y Q son los proyectores ortogonales sobre $\ker D^\perp$ y $\ker A^\perp$, respectivamente (ver la Obs. 2.1.4). $\triangle$

Corolario 2.2.9. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $B \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Entonces

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{en} \quad L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \qquad \iff \qquad -A \leq B \leq A \quad \text{en} \quad L(\mathcal{H}) \ .$$

En particular, si $B \in L(\mathcal{H})^+$, lo anterior equivale a que $B \leq A$.

Demostración. Si la matriz M es positiva, por el Teo. 2.2.7 sabemos que existe una contracción $C \in L(\mathcal{H})$ tal que $A^{1/2} C A^{1/2} = B$. Necesitaríamos usar que $C \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, lo que no es claro que sea cierto. Para safar, consideremos $D = PCP$, donde $P = P_{\overline{R(A^{1/2})}} \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$.

Este D cumple la misma ecuación (porque $P\,A^{1/2} = A^{1/2}\,P = A^{1/2}$). Sigue cumpliendo que $\|D\| \leq 1$. Pero ahora sí vale que $A^{1/2}\,D\,A^{1/2} = B \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) \implies D \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$. En efecto, basta testear que $\langle D\,x\,,\,x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in R(P)$ (donde opera D). Pero podemos usar que $R(A^{1/2})$ es denso en $R(P)$ y que $A^{1/2}\,D\,A^{1/2} \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Ahora sí podemos hacer esto:

$$\|D\| \leq 1 \quad \overset{D=D^*}{\Longrightarrow} \quad -I \leq D \leq I \qquad \Longrightarrow \qquad -A \leq A^{1/2} D A^{1/2} = B \leq A \ .$$

Para ver la recíproca, la cuenta saldría joya su uno pudiera "dividir" por $A^{1/2}$. Para safar esta vez, tomemos $A_n = A + \frac{1}{n}\,I \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})^+$ (para cada $n \in \mathbb{N}$). Luego

$$-A_n \leq -A \leq B \leq A \leq A_n \implies -I \leq A_n^{-1/2}\,B\,A_n^{-1/2} \leq I \implies \|A_n^{-1/2}\,B\,A_n^{-1/2}\| \leq 1 \ .$$

Ahora les podemos aplicar a todos ellos el Teo. 2.2.7 con $C_n = A_n^{-1/2}\,B\,A_n^{-1/2}$ y nos queda

$$0 \leq \begin{bmatrix} A_n & B \\ B & A_n \end{bmatrix} = M + \frac{1}{n} \ I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \implies M \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})^+ \ ,$$

como queríamos demostrar. □

2.3 Shorted de un operador (cortocircuitos)1g.

Definición y propiedades básicas

Comenzaremos con el siguiente resultado originalmente obtenido por Krein, y redescubierto varios años después por Anderson-Trapp [11], el cual dará origen a la definición de Shorted de un operador. La prueba que daremos se basa en un trabajo posterior de Pekarev [32].

Teorema 2.3.1. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces el conjunto

$$\mathcal{M}(A, \mathcal{S}) \overset{\text{def}}{=} \{D \in L(\mathcal{H})^+ : \ D \leq A \quad \text{y} \quad R(D) \subseteq \mathcal{S}\} \tag{2.3}$$

posee un elemento máximo en el orden usual de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

Demostración. Sean $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$ y $T = A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$. Claramente $T \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$. Por otra parte, si $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$, en particular $D \leq A$. Por el Teorema de Douglas 2.1.1 (con constante $\lambda = 1$), debe existir una contracción $C \in L(\mathcal{H})$ tal que $D^{1/2} = A^{1/2}\,C$.

Ahora bien, tenemos que $A^{1/2}(R(C)\,) = R(D^{1/2}) \subseteq \overline{R(D)} \subseteq \mathcal{S} \implies R(C) \subseteq \mathcal{M}$. Esto nos asegura que $P_{\mathcal{M}}\,C = C$. Usando que $C\,C^* \leq I$, podemos deducir que $C\,C^* \leq P_{\mathcal{M}}$. Luego

$$D = A^{1/2}\,C\,C^*\,A^{1/2} \leq A^{1/2}\,P_{\mathcal{M}}\,A^{1/2} = T\ ,$$

lo cual muestra que nuestro $T = \max \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$. $\square$

Definición 2.3.2. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Llamaremos shorted de A al subespacio $\mathcal{S}$, y lo notaremos $\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})$, al máximo del conjunto $\mathcal{M}(A, \mathcal{S})$. $\triangle$

En la siguiente proposición, recopilamos una serie de resultados más o menos inmediatos a partir de la definición del shorted y de la demostración del Teo. 2.3.1.

Proposición 2.3.3. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces:

1. Demás está decir que $\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \leq A$ y que $R\big(\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\,\big) \subseteq \mathcal{S}$.
2. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$, se tiene que $\mathbb{SC}\,(\alpha\,A\,,\,\mathcal{S}) = \alpha\ \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})$.
3. Si $B \in L(\mathcal{H})^+$ cumple que $A \leq B$, entonces
$$\mathcal{M}(A\,,\,\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}(B\,,\,\mathcal{S}) \quad \text{y por lo tanto} \quad \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \leq \mathbb{SC}\,(B\,,\,\mathcal{S})\ .$$
4. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \sqsubseteq \mathcal{H}$, entonces $\mathcal{M}(A\,,\,\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}(A\,,\,\mathcal{T})$ y $\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \leq \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{T})$.
5. Como el $R\big(\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\,\big) \subseteq \mathcal{S}$, tenemos que $\mathbb{SC}\,\big(\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\,,\,\mathcal{S}\big) = \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})$.
6. $\mathbb{SC}\,(A^2\,,\,\mathcal{S})^{1/2} \leq \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\,.$
7. Si denotamos por $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$, se tiene la fórmula
$$\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \;=\; A^{1/2}\,P_{\mathcal{M}}\,A^{1/2}\ . \tag{2.4}$$

Demostración. Los items 1 - 5 se deducen de la definición y el 7 de la prueba del Teo. 2.3.1. El 6 usa el Teorema de Löwner: Como tomar raíces cuadradas preserva el orden, tenemos que $D \in \mathcal{M}(A^2\,,\,\mathcal{S}) \implies D^{1/2} \in \mathcal{M}(A\,,\,\mathcal{S})$, porque el $R(D^{1/2})$ no puede salirse de $\mathcal{S}$. En particular nos queda que $\mathbb{SC}\,(A^2\,,\,\mathcal{S})^{1/2} \in \mathcal{M}(A\,,\,\mathcal{S})$. $\square$

Como x^2 no es MOP, siguiente resultado es más fuerte que el item 6 de la Prop. 2.3.3:

Proposición 2.3.4. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces, $\mathbb{SC}\,(A^2\,,\,\mathcal{S}) \leq \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})^2$.

Demostración. Denotemos por $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$ y $\mathcal{N} = A^{-1}(\mathcal{S})$. Consideremos los proyectores sobre ellos: $P_{\mathcal{M}}$, $P_{\mathcal{N}} \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$. Observar que $A^{1/2}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M}$. Por lo tanto, se tiene que

$$(I - P_{\mathcal{M}})\, A^{1/2}\, P_{\mathcal{N}} = 0 \quad \stackrel{*}{\Longrightarrow} \quad P_{\mathcal{N}}\, A^{1/2}\,(I - P_{\mathcal{M}}) = 0 \ .$$

En particular $P_{\mathcal{N}}\, A^{1/2} = P_{\mathcal{N}}\, A^{1/2}\, P_{\mathcal{M}}$. Fijado un vector $x \in \mathcal{H}$, nos queda que

$$\begin{aligned} \langle A^{1/2}\, P_{\mathcal{N}}\, A^{1/2}\, x\,,\, x\rangle \ &= \langle P_{\mathcal{N}}\, A^{1/2}\, x\,,\, P_{\mathcal{N}}\, A^{1/2}\, x\rangle = \|P_{\mathcal{N}}\, A^{1/2}\, x\|^2 = \|P_{\mathcal{N}}\, A^{1/2}\, P_{\mathcal{M}}\, x\|^2 \\ &\le \|A^{1/2}\, P_{\mathcal{M}}\, x\|^2 = \langle P_{\mathcal{M}}\, A\, P_{\mathcal{M}}\, x\,,\, x\rangle \ . \end{aligned}$$

Luego $A^{1/2}\, P_{\mathcal{N}}\, A^{1/2} \le P_{\mathcal{M}}\, A\, P_{\mathcal{M}}$. Conjugando con $A^{1/2}$ nos queda que

$$\mathbb{SC}\left(A^2\,,\,\mathcal{S}\right) \stackrel{(2.4)}{=} A\, P_{\mathcal{N}}\, A \le A^{1/2}\, P_{\mathcal{M}}\, A\, P_{\mathcal{M}} A^{1/2} = (\, A^{1/2}\, P_{\mathcal{M}}\, A^{1/2}\,)^2 \stackrel{(2.4)}{=} \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})^2 \ . \qquad \square$$

Proposición 2.3.5. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S}, \mathcal{T} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces

$$\mathbb{SC}\left(\, \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\ ,\ \mathcal{T}\,\right) = \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \ . \tag{2.5}$$

Demostración. Consideremos los conjuntos

$$\mathcal{M}(A\,,\,\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = \{D \in L(\mathcal{H})^+ :\ D \le A \quad \text{y} \quad R(D) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{M}\big(\, \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{T})\ ,\ \mathcal{S}\,\big) = \{D \in L(\mathcal{H})^+ :\ D \le \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{T}) \quad \text{y} \quad R(D) \subseteq \mathcal{S}\} \ .$$

Probaremos que estos conjuntos son iguales y por ende sus máximos, que son los dos shorted's de (2.5) también lo serán. Sea $D \in \mathcal{M}(A\,,\,\mathcal{S} \cap \mathcal{T})$. Luego tenemos que

$$R(D) \subseteq \mathcal{T} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \quad \text{y} \quad D \le A \implies D \le \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{T}) \quad \text{y} \quad R(D) \subseteq \mathcal{S} \ .$$

Eso nos dice que $D \in \mathcal{M}\big(\, \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{T})\ ,\ \mathcal{S}\,\big)$. Recíprocamente, si asumimos que

$$D \in \mathcal{M}\big(\, \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{T})\ ,\ \mathcal{S}\,\big) \implies D \le \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{T}) \stackrel{(2.1)}{\Longrightarrow} R(D) \subseteq R\big(\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{T})\,\big) \subseteq \mathcal{T} \ .$$

Por lo tanto ya sabemos que $R(D) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Como además $D \le \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{T}) \le A$, llegamos a lo que queríamos: $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$. $\square$

2.4 Rango y Núcleo de los operadores shorted.

Proposición 2.4.1. Dados $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$, se tiene la igualdad

$$R\big(\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})^{1/2}\big) = R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S} \ . \tag{2.6}$$

Demostración. Sea $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$. Observar que, volviendo y yendo queda que

$$R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S} = A^{1/2}\big(\, A^{-1/2}(\mathcal{S})\,\big) = A(\mathcal{M}) = R(A^{1/2}\, P_{\mathcal{M}}) \ .$$

Luego, por el Cor. 2.1.2 (decía que $R(B^*) = R(\,|B|\,)$), sale lo anunciado:

$$\begin{aligned} R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S} \ &= R(A^{1/2}\, P_{\mathcal{M}}) = R\big(\,|P_{\mathcal{M}}\, A^{1/2}|\,\big) \\ &= R\big(\,(A^{1/2}\, P_{\mathcal{M}}\, A^{1/2})^{1/2}\,\big) \stackrel{(2.4)}{=} R\big(\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})^{1/2}\,\big) \ . \end{aligned}$$

□

Corolario 2.4.2. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces

$$R(A) \cap \mathcal{S} \subseteq R\big(\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\,\big) \subseteq R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S} \ .$$

Demostración. En la Prop. 2.4.1 (aplicada a A^2) vimos que $R(A) \cap \mathcal{S} = R\big(\,\mathbb{SC}\,(A^2\,,\,\mathcal{S})^{1/2}\,\big)$. Por otro lado, la Prop. 2.3.4 dice que $\mathbb{SC}\,(A^2\,,\,\mathcal{S}) \leq \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})^2$. A partir de ello, el Teo. de Douglas 2.1.1 nos asegura que $R(A) \cap \mathcal{S} = R(\mathbb{SC}\,(A^2\,,\,\mathcal{S})^{1/2}) \subseteq R\big(\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\,\big)$.

La otra inclusión se sigue de que $R\big(\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\,\big) \subseteq R\big(\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})^{1/2}\,\big) \stackrel{(2.6)}{=} R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S}$. □

El siguiente lema será de utilidad en muchas cuentas futuras:

Lema 2.4.3. Sean $B \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{N} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Luego se tiene la igualdad

$$B^{-1}\,(\mathcal{N}^{\perp}\,) \ = \ B\,(\mathcal{N}\,)^{\perp} \tag{2.7}$$

Demostración. Dado un $y \in \mathcal{H}$ se tiene que $\langle B\,x\,,\,y\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{N}$ si y sólo si $\langle x\,,\,B\,y\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{N}$. Si se mira bien, eso es (2.7). □

Por comodidad notacional, para un $X \subseteq \mathcal{H}$ cuyo nombre sea muy largo, de ahora en más algunas veces escribiremos $\mathrm{c\,l}\,(X)$ en vez de $\overline{X}$ para denotar a su clausura.

Proposición 2.4.4. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$, $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$. Entonces

1. $\mathrm{c\,l}\big(\,\ker A + \mathcal{S}^{\perp}\big) \subseteq \ker\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) = A^{-1/2}(\mathcal{M}^{\perp})$.
2. $\ker\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) = \ker A + \mathcal{S}^{\perp} \iff A^{1/2}(\mathcal{S}^{\perp})$ es cerrado en $R(A^{1/2})$.

Demostración.

1. Por un lado, usando la Prop. 2.4.1 se tiene

$$\mathrm{c\,l}\big(\ker A + \mathcal{S}^{\perp}\big) \subseteq (R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S})^{\perp} = \ker\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})^{1/2} = \ker\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \ .$$

   Por el otro, como $\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \stackrel{(2.4)}{=} A^{1/2}\,P_{\mathcal{M}}\,A^{1/2}$, vemos que

$$\ker\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) = \ker\,(A^{1/2}\,P_{\mathcal{M}}\,A^{1/2}) = \ker\,(P_{\mathcal{M}}\,A^{1/2}) = A^{-1/2}(\mathcal{M}^{\perp}) \ .$$

2. Dado que $\Big(A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)\Big)^\perp \overset{(2.7)}{=} A^{-1/2}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}$, se tiene $\mathrm{cl}\left(A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)\right) = \mathcal{M}^\perp$. Luego

$$A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp) \sqsubseteq R(A^{1/2}) \iff \mathcal{M}^\perp \cap R(A^{1/2}) \overset{\star}{=} A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp) \ .$$

Pero como ambos viven dentro de $R(A^{1/2})$, la igualdad $\overset{\star}{=}$ equivale a que

$$\ker \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) = A^{-1/2}(\mathcal{M}^\perp) \overset{A^{-1/2}(\star)}{=} A^{-1/2}\big(\,A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)\,\big) = \ker A + \mathcal{S}^\perp \ . \qquad \square$$

EL shorted es la mayor "parte" de un $A \in L(\mathcal{H})^+$ que trabaja dentro de un $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Dimos bastante información sobre quien es y cuales son su imagen y su núcleo. Estudiemos ahora lo que le "sobra", que se suele llamar la $\mathcal{S}$-compresión de A.

Definición 2.4.5. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Al operador

$$A_{\mathcal{S}} \overset{\text{def}}{=} A - \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \in L(\mathcal{H})^+$$

lo llamaremos la $\mathcal{S}$-compresión de A. △

Proposición 2.4.6. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces

$$R({A_{\mathcal{S}}}^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\} \quad \text{ y } \quad \ker A_{\mathcal{S}} = A^{-1}(\mathcal{S}) \ .$$

Demostración. Supongamos que nos dan un $x \in R({A_{\mathcal{S}}}^{1/2}) \cap \mathcal{S}$. Consideremos el proyector $P = P_x = x \odot x \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$. Como $R(P) \subseteq R({A_{\mathcal{S}}}^{1/2})$, por el Teorema de Douglas 2.1.1,

$$\text{existe} \quad \lambda > 0 \quad \text{tal que} \quad \lambda P \le A_{\mathcal{S}} = A - \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \implies \lambda P + \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \le A \ .$$

Pero al asumir que $x \in \mathcal{S}$ nos queda que $\lambda P + \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \in \mathcal{M}(A\,,\,\mathcal{S})$ y le gana al shorted. Luego P debe ser nulo y x era el 0, como anunciábamos.

Por otro lado, si $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$, entonces por la Prop. 2.3.3,

$$\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) = A^{1/2} P_{\mathcal{M}} A^{1/2} \implies A_{\mathcal{S}} = A^{1/2}(I - P_{\mathcal{M}})A^{1/2} \ .$$

Luego el $\ker A_{\mathcal{S}} = \ker\,(I - P_{\mathcal{M}})\,A^{1/2} = A^{-1/2}(\mathcal{M}) = A^{-1/2}\big(A^{-1/2}(\mathcal{S})\,\big) = A^{-1}(\mathcal{S})$. □

2.5 Otras caracterizaciones del Shorted.

Teorema 2.5.1 (Ando - Descomposición de Lebesgue)**.** Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces existen únicos F y $G \in L(\mathcal{H})^+$ tales que:

$$A = F + G \ , \quad R(F^{1/2}) \subseteq \mathcal{S} \quad \text{ y } \quad R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\} \ . \tag{2.8}$$

Más aun, ellos no son otros que $F = \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})$ y $G = A_{\mathcal{S}}$.

Demostración. La definición del shorted y la Prop. 2.4.6 nos dicen que si elegimos los operadores $F = \mathbb{SC}(A, \mathcal{S})$ y $G = A_{\mathcal{S}}$, ellos cumplen las condiciones de (2.8).

Supongamos ahora que nos dan otro par F y $G \in L(\mathcal{H})^+$ que también las satisfacen. Luego

$$R(F) \subseteq R(F^{1/2}) \subseteq \mathcal{S} \quad \text{y} \quad F \leq A \overset{F\in\mathcal{M}(A,\mathcal{S})}{\Longrightarrow} B \overset{\text{def}}{=} \mathbb{SC}(A, \mathcal{S}) - F \in L(\mathcal{H})^+ .$$

Entonces escribamos a $G = A - F = A_{\mathcal{S}} + B \geq B$. Luego tenemos que

$$R(B^{1/2}) \subseteq \mathcal{S} \quad \text{y por Douglas 2.1.1} \quad R(B^{1/2}) \subseteq R(G^{1/2}) .$$

Como $R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\}$ queda que $B = 0$ y $\mathbb{SC}(A, \mathcal{S}) = F$. □

Teorema 2.5.2. Sean $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$ y $M = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array} \in L(\mathcal{H})^+$. Llamemos $C \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp)$ a la SR de la ecuación $B = D^{1/2} X$ (que existe por la Prop. 2.2.3). Entonces

$$\mathbb{SC}(M, \mathcal{S}) = \begin{bmatrix} A - C^*C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Demostración. Podemos partir a M usando a la solución C del siguiente modo:

$$M = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - C^*C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C^* \\ 0 & D^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & D^{1/2} \end{bmatrix} = F + G .$$

Para mostrar que $F = \mathbb{SC}(M, \mathcal{S})$ bastaría verificar que F y G están en las condiciones del Teo. 2.5.1. Vamos por partes. Es claro que $G \geq 0$. Por el Cor. 2.1.2, se tiene que

$$R(G^{1/2}) = R\left(\begin{bmatrix} 0 & C^* \\ 0 & D^{1/2} \end{bmatrix} \right) .$$

Ahora bien, si $\begin{bmatrix} 0 & C^* \\ 0 & D^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^* y \\ D^{1/2} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \in R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S}$, entonces $D^{1/2}y = 0$. Pero observemos que $\ker(D^{1/2}) \subseteq \ker(C^*)$, porque C es la SR de $B = D^{1/2} X$. Luego también $z = C^*y = 0$, y llegamos a que $R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\}$. Por otro lado, la Prop. 2.2.4 nos asegura que $F \geq 0$ y el hecho de que $R(F^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}$ sale mirando su matriz. □

Corolario 2.5.3. Sean $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$ y $M = \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array} \in L(\mathcal{H})^+$. Supongamos ahora que $R(D) \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces tenemos esta nueva descripción del shorted:

$$\mathbb{SC}\left(\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & D \end{bmatrix}, \mathcal{S} \right) = \begin{bmatrix} A - B^*D^\dagger B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Demostración. Sale porque la SR de la ecuación $B = D^{1/2}X$ es $(D^{1/2})^\dagger B = (D^\dagger)^{1/2}B$. □

Ejercicio 2.5.4. Sea $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Recorderemos la casimatriz $M = \begin{bmatrix} ? & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array}$ del Ejer. 2.1.5. Consideremos ahora el conjunto de bloques 1,1 adecuados:

$$\mathcal{P}(M\,,\,\mathcal{S}) = \left\{X \in L(\mathcal{S})^+ \ : \ \begin{bmatrix} X & B^* \\ B & D \end{bmatrix} \in L(\mathcal{H})^+ \right\} .$$

El Ejer. 2.1.5 decía que $\mathcal{P}(M\,,\,\mathcal{S}) \neq \varnothing \iff R(B) \subseteq R(D^{1/2})$. Este ejercicio consiste en probar que, en tal caso, existe $X_0 = \min \mathcal{P}(M\,,\,\mathcal{S})$ y además identificarlo. $\triangle$

Alguien dijo que en un problema de aproximación, todo máximo de algo puede también ser descrito como un mínimo. Eso pasa con las normas de operadores (supremo en la bola, pero mínimo de las cotas superiores). Ahora veremos dos caracterizaciones del shorted (definido como un máximo) que se obtienen tomando ínfimos adecuados:

Proposición 2.5.5. Sean $M \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Dado $x \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$\left\langle \mathbb{SC}\,(M\,,\,\mathcal{S}) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \inf \left\{ \left\langle M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \ : \ y \in \mathcal{S}^\perp \right\} . \tag{2.9}$$

Demostración. Observar que para todo $y \in \mathcal{S}^\perp$ se debe cumplir que

$$m \overset{\text{def}}{=} \left\langle \mathbb{SC}\,(M\,,\,\mathcal{S}) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \mathbb{SC}\,(M\,,\,\mathcal{S}) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \leq \left\langle M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle ,$$

por lo que m es una cota inferior. Pero escribiendo a M como una matriz 2×2, el Teo. 2.5.2 y la Ec. (2.2) de la Prop. 2.2.4, aseguran que m debe ser el ínfimo, porque hay una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}^\perp$ que aproxima el valor de $\langle\, \mathbb{SC}\,(M\,,\,\mathcal{S})\; x\,,\,x\rangle$. $\square$

Teorema 2.5.6. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{N}(A, \mathcal{S}) = \{Q\,A\,Q^* : \ Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \ \text{ y } \ R(Q) = \mathcal{S}\} \ .$$

Entonces $\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) = \operatorname{ínf} \mathcal{N}(A, \mathcal{S})$, con respecto al orden usual de $\mathcal{A}(\mathcal{H})$.

Demostración. Llamemos $\mathcal{P}_\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) : R(Q) = \mathcal{S}\}$. Un ejercicio fácil dice que dado un $Q \in \mathcal{P}_\mathcal{S}(\mathcal{H})$, debe existir un $B \in L(\mathcal{S}^\perp\,,\,\mathcal{S})$ tal que $Q = \begin{bmatrix} I & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array}$ (sale usando que $P_\mathcal{S}\,Q = Q$) . Luego, dado $y = x + z \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp = \mathcal{H}$, se tiene que

$$\langle\, Q\,A\,Q^* y\,,\,y\rangle = \left\langle A\,Q^* \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} , Q^* \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle A \begin{bmatrix} x \\ B^*\,x \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ B^*\,x \end{bmatrix} \right\rangle . \tag{2.10}$$

Observar que cualquier $B \in L(\mathcal{S}^\perp\,,\,\mathcal{S})$ produce un $Q = \begin{bmatrix} I & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}_\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Luego los valores $w = B^*\,x$ recorren todo $\mathcal{S}^\perp$. Usando la Prop. 2.5.5 y la Ec. (2.10) deducimos que

$$\begin{aligned} \inf_{Q\in\mathcal{P}_\mathcal{S}} \langle\, QAQ^*\,y\,,\,y\rangle &= \inf_{w\in\mathcal{S}^\perp} \left\langle A \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \right\rangle \\ &\overset{(2.9)}{=} \left\langle \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle\, \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\; y\,,\,y\rangle \ , \end{aligned}$$

para todo $y = x + z \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp = \mathcal{H}$. Luego $\mathbb{SC}(A\,,\,\mathcal{S}) = \inf \mathcal{N}(A, \mathcal{S})$, en el sentido de que es cota inferior y debe ser mayor que todas las otras cotas. $\square$

2.6 Convergencia.

Proposición 2.6.1. Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L(\mathcal{H})^+$ tal que $A_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{SOT}}{\searrow}} A$ y $\{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. Entonces

$$\mathbb{SC}(A_n\,,\,\mathcal{S}_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{SOT}}{\searrow}} \mathbb{SC}(A\,,\,\mathcal{S}) \ , \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n \ .$$

Demostración. Llamemos $B_n = \mathbb{SC}(A_n\,,\,\mathcal{S}_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Prop. 2.3.3, nuestra sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente en $L(\mathcal{H})^+$. Por lo de abajo de la Ec. (1.2), debe tener un límite (ínfimo) en la topología fuerte de operadores SOT, al cual denotaremos $B \in L(\mathcal{H})^+$.

Como $\mathbb{SC}(A\,,\,\mathcal{S}) \le B_n \le A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, nos queda que $\mathbb{SC}(A\,,\,\mathcal{S}) \le B \le A$. Luego bastaría verificar que $R(B) \subseteq \mathcal{S}$ para que $B \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$, porque ello nos daría la otra desigualdad $B \le \mathbb{SC}(A\,,\,\mathcal{S})$. Para convencernos de que $R(B) \subseteq \mathcal{S}$, usemos Douglas 2.1.1:

$$B \le B_n \implies R(B) \subseteq R(B^{1/2}) \subseteq R\big(B_n^{1/2}\big) \overset{(2.6)}{=} R(A_n^{1/2}) \cap \mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{S}_n \ ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así que $R(B) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$. $\square$

La Prop. 2.6.1 mata dos pájaros de un tiro. Para entenderla mejor veamos dos casos particulares que son interesantes en sí mismos:

Corolario 2.6.2. Trabajaremos en $\mathcal{H}$ que es un EH.

1. Sea $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Si nos dan una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $L(\mathcal{H})^+$ tal que $A_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{SOT}}{\searrow}} A$, vale que

$$\mathbb{SC}(A_n\,,\,\mathcal{S}) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{SOT}}{\searrow}} \mathbb{SC}(A\,,\,\mathcal{S}) \ .$$

2. Si ahora fijamos el operador $A \in L(\mathcal{H})^+$ y tenemos una sucesión decreciente $\{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$, ahí nos queda que

$$\mathbb{SC}(A\,,\,\mathcal{S}_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{SOT}}{\searrow}} \mathbb{SC}(A\,,\,\mathcal{S}) \ , \qquad \text{donde} \qquad \mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n \ .$$

Demostración. Es la Prop. 2.6.1 fijando cada una de las variables. $\square$

Ahora buscaremos condiciones suficientes para garantizar la convergencia en norma.

Lema 2.6.3. Sean $A \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$. Entonces

$$\mathbb{SC}\,(A+\varepsilon I\,,\,\mathcal{S}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{\|\cdot\|} \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \ .$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, llamemos $\lambda_\varepsilon = 1 + \varepsilon\|A^{-1}\|$. Como $I \le \|A^{-1}\|A$, deducimos que $A + \varepsilon I \le \lambda_\varepsilon\, A$ y por ende $\mathbb{SC}\,(A+\varepsilon I\,,\,\mathcal{S}) \le \lambda_\varepsilon\,\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})$. Por lo tanto,

$$\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \le \mathbb{SC}\,(A+\varepsilon I\,,\,\mathcal{S}) \le \lambda_\varepsilon\ \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{\|\cdot\|} \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \ ,$$

por lo que $\mathbb{SC}\,(A+\varepsilon I\,,\,\mathcal{S})$ converge ensanguchadamente a $\mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})$. □

Teorema 2.6.4. Sean $A \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})^+$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{G}l(\mathcal{H})^+$ tal que

$$A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} A \qquad \text{y} \qquad A_n \ge A \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Entonces, para todo $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}$, se cumple que

$$\mathbb{SC}\,(A_n\,,\,\mathcal{S}) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S}) \ .$$

Demostración. Observar que $A_n = A + (A_n - A) \le A + \|A_n - A\|\, I$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si abreviamos $\varepsilon_n = \|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, por el Lema anterior se tiene que

$$\|\mathbb{SC}\,(A_n\,,\,\mathcal{S}) - \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\,\| \le \|\mathbb{SC}\,(A+\varepsilon_n I\,,\,\mathcal{S}) - \mathbb{SC}\,(A\,,\,\mathcal{S})\,\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ ,$$

donde el $\le$ vale porque en general $0 \le B \le C \overset{Ej.}{\Longrightarrow} \|B\| \le \|C\|$. Y usamos que cada $A_n \ge A$ para que lo de adentro de las normas sea siempre positivo. □

2.7 La ecuación $X = A - B^*X^{-1}B$.

Definición 2.7.1. Sean $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ y $B \in L(\mathcal{H})$. Dado $n \in \mathbb{N}$, llamaremos

$$Z_n(A,B) = \begin{bmatrix} A & B^* & 0 & \dots & 0 \\ B & A & B^* & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B & A & B^* \\ 0 & \dots & 0 & B & A \end{bmatrix} \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^{n+1})\ .$$

Si $A = I$, escribiremos $Z_n(B)$ en lugar de $Z_n(I,B)$. △

Observación 2.7.2. Sean $a \in \mathbb{R}_+^*$ y $b \in \mathbb{C}$. Supongamos que $Z_n(a,b) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Llamemos $d_0 = a$, $d_n = \det Z_n(a,b)$ y $x_n = \dfrac{d_n}{d_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver, desarrollando por las primeras columnas, que se tiene la fórmula recursiva

$$d_{n+1} = a\,d_n \ - \ |b|^2\,d_{n-1} \implies x_{n+1} = \frac{d_{n+1}}{d_n} \ = \ a - |b|^2\ \frac{d_{n-1}}{d_n} = a - |b|^2 x_n^{-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Como $x_1 = \frac{a^2-|b|^2}{a} \leq a = x_0$, uno muestra recursivamente que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión decreciente. Por lo tanto, su límite x debe cumplir

$$0 < x \quad \text{ y } \quad x = a - |b|^2 x^{-1} = a - \overline{b}\, x^{-1}\, b \ .$$

Veremos que una condición de este tipo es necesaria y suficiente para la positividad de las matrices $Z_n(A,B)$, incluso en el caso de operadores. Tal ecuación sería

$$X = A - B^* X^{-1} B \quad \text{(todos en } L(\mathcal{H})\text{, pero } A \text{ y } X \text{ en } L(\mathcal{H})^+) \qquad .$$

Esta ecuación es interesante en sí misma, dado que tiene aplicaciones en teoría de circuitos eléctricos. Para evitar pedir que nadie sea inversible, se la puede mejorar usando operadores shorted, usando la fórmula (2.11) del siguiente Teorema. Si $X > 0$, el Cor. 2.5.3 dice que (2.11) es equivalente a la ecuación anterior. $\triangle$

Teorema 2.7.3. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $B \in L(\mathcal{H})$. Son equivalentes:

1. Existe $X \in L(\mathcal{H})^+$ tal que

$$\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & X \end{bmatrix} \in L(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})^+ \text{ y } \mathbb{SC}\left(\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & X \end{bmatrix}, \mathcal{H}\oplus\{0\} \right) = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \qquad (2.11)$$

2. El conjunto $M(A,B) = \left\{ Y \in L(\mathcal{H})^+ : \begin{bmatrix} A-Y & B^* \\ B & Y \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \neq \varnothing$.

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $Z_n(A,B) \in L(\mathcal{H}^{n+1})^+$.

En tal caso, existe $X = \max M(A,B)$, y es una de las soluciones de la Ec. (2.11).

Demostración. Si existe un X que cumpla la Ec. (2.11), entonces $X \in M(A,B) \neq \varnothing$. Supongamos ahora que existe $Y \in M(A,B)$. Tenemos que

$$0 \leq Y \leq A \quad \text{ por lo que } \quad 0 \leq \begin{bmatrix} A-Y & B^* \\ B & Y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & A \end{bmatrix} = Z_2(A,B) \ .$$

Análogamente,

$$0 \leq \begin{bmatrix} A-Y & B^* & 0 \\ B & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A-Y & B^* \\ 0 & B & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-Y & B^* & 0 \\ B & A & B^* \\ 0 & B & Y \end{bmatrix} \leq Z_3(A,B) \ .$$

Inductivamente, uno prueba que $Z_n(A,B) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que $3 \to 1$: Notemos $X_0 = A$ y $X_n = \mathbb{SC}\left(Z_n(A,B)\,,\, \mathcal{H}\oplus\{0_n\}\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Pensamos a todos los X_n como con operadores en $L(\mathcal{H})^+$ (dado que sólo operan en la primera cordenada de $\mathcal{H}^{n+1}$). Llamemos $B_n = (B, 0_{n-1}) \in L(\mathcal{H})^n$, pensado como una columna, o bien $B_n = (0_{n-1}\,, B) \in L(\mathcal{H})^n$, como vector fila. Entonces, si tomamos $Z_0(A,B) = A$, se tienen las igualdades

$$Z_{n+1}(A,B) = \begin{bmatrix} A & B_{n+1}^* \\ B_{n+1} & Z_n(A,B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_n^* & 0 \\ B_n & Z_{n-1}(A,B) & B_n^* \\ 0 & B_n & A \end{bmatrix} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Por la Prop. 2.5.5, para todo $x \in \mathcal{H}$ y todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle X_n x, x\rangle &= \inf \left\{ \left\langle \begin{bmatrix} A & B_n^* \\ B_n & Z_{n-1}(A,B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle : y \in \mathcal{H}^n \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \left\langle \begin{bmatrix} A & B_n^* & 0 \\ B_n & Z_{n-1}(A,B) & B_n^* \\ 0 & B_n & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle : (y,z) \in \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{H} \right\} \\ &= \langle X_{n+1}\, x, x\rangle \ , \end{aligned}$$

es decir que la sucesión X_n es decreciente. Al tomar el ínfimo sobre $y \in \mathcal{H}^n$ de la ecuación anterior, si escribimos $y = (y_1, y_2) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{n-1}$ nos queda

$$\langle X_n x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \inf_{y=(y_1,y_2)\in\mathcal{H}^n} \{2\,\mathrm{Re}\,\langle Bx, y_1\rangle + \langle Z_{n-1}(A,B)y, y\rangle\} \ .$$

Si fijamos $y_1 \in \mathcal{H}$ y movemos $y_2 \in \mathcal{H}^{n-1}$, obtenemos

$$\inf_{y_2\in\mathcal{H}^{n-1}} \left\langle Z_{n-1}(A,B) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle X_{n-1} y_1, y_1\rangle \ .$$

Tomando ahora ínfimo sobre $y_1 \in \mathcal{H}$, llegamos a que, para todo $x \in \mathcal{H}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle X_n x, x\rangle = \inf \left\{ \left\langle \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & X_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y_1 \end{bmatrix} \right\rangle : y_1 \in \mathcal{H} \right\} \ .$$

Aplicando nuevamente la Prop. 2.5.5, esto se reescribe como

$$\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & X_{n-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{SC}\left(\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & X_{n-1} \end{bmatrix}, \mathcal{H} \oplus \{0\} \right) = \begin{bmatrix} X_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \tag{2.12}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomemos X el límite para $n \to \infty$ de los X_n (que existe, al menos en la topología fuerte de operadores, por ser la sucesión decreciente). Luego, mirando el límite en la Ec. (2.12), obtenemos que $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & X \end{bmatrix} \geq 0$. Por la Prop. 2.6.1, deducimos que X verifica la fórmula (2.11). Finalmente, observar que $X \in M(A,B)$ y, si $Y \in M(A,B)$, entonces $Y \leq A = X_0$. Si hubiéramos obtenido que $Y \leq X_{n-1}$, para cada $x \in \mathcal{H}$ tendríamos que

$$\begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & Y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & X_{n-1} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Y \leq X_n \ ,$$

por la Ec. (2.12) y la Def. 2.3.2 de operador shorted. Tomando ínfimo, llegamos a que $Y \leq X$. $\square$

Observación 2.7.4. El operador X construido en la prueba del Teo. 2.7.3 se puede obtener recursivamente por la siguiente receta, usando la fórmula (2.12): Tomar $X_0 = A$ y, para $n \in \mathbb{N}$, tomar

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{SC}\left(\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & X_n \end{bmatrix}, \mathcal{H} \oplus \{0\} \right) .$$

Luego $X_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{S.O.T.}} X$ decrecientemente. △

Observación 2.7.5. Una variación: Fijemos cualquier $Y_0 \in M(A, B)$. Como

$$\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & Y_0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{podemos definir} \quad Y_1 = \mathbb{SC}\left(\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & Y_0 \end{bmatrix}, \mathcal{H} \oplus \{0\} \right) ,$$

pensado en $L(\mathcal{H})^+$ (sin los tres ceros). Del hecho de que $Y_0 \in M(A, B)$, deducimos que

$$\begin{bmatrix} Y_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & Y_0 \end{bmatrix} \implies Y_0 \leq Y_1 \quad \text{y}$$

$$0 \leq \begin{bmatrix} A - Y_1 & B^* \\ B & Y_0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} A - Y_1 & B^* \\ B & Y_1 \end{bmatrix} \implies Y_1 \in M(A, B) .$$

Definiendo recursivamente $Y_{n+1} = \mathbb{SC}\left(\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & Y_n \end{bmatrix}, \mathcal{H} \oplus \{0\} \right)$, obtenemos una sucesión *creciente* en $M(A, B)$ cuyo supremo Y debe cumplir la Ec. (2.11). En principio no se sabe si la solución Y es la misma del proceso anterior (o del que resulte de empezar con otro elemento de $M(A, B)$).

En efecto, la solución X de la Ec. (2.11) no es necesariamente única, como lo muestra el caso unidimensional, donde la ecuación $x = a - x^{-1}|b|^2$ puede producir dos soluciones positivas: si $b \neq 0$,

$$x = a - x^{-1}|b|^2 \iff x^2 - ax + |b|^2 = 0 \iff x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4|b|^2}}{2} ,$$

siempre que $2|b| \leq a$. Esta condición, que es entonces equivalente al hecho de que $Z_n(a, b) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se puede generalizar a operadores (usando el radio numérico en lugar del módulo). △

Observación 2.7.6. Si en el Teo. 2.7.3 se toman sistemáticamente operadores shorted sobre el subespacio $\{0\} \oplus \mathcal{H}$ (es decir, que se trabaja en el lugar $2, 2$ de las matrices en cuestión), se obtiene, bajo las mismas hipótesis (los $Z_n(A, B) \geq 0$), un operador X_2 que es solución de la Ec. (2.11) con B cambiado por B^*. Además,

$$X_2 = \max \left\{ Z \in L(\mathcal{H})^+ : \begin{bmatrix} Z & B^* \\ B & A - Z \end{bmatrix} \geq 0 \right\} = \min M(A, B) ,$$

dado que la aplicación $Z \mapsto A - Z = Y$ manda el conjunto del medio sobre $M(A,B)$, e invierte el orden. En $\dim \mathcal{H} = 1$, se tiene que, si $0 < 2|b| \le a$ y $0 < y < a$,

$$\begin{bmatrix} a-y & \bar{b} \\ b & y \end{bmatrix} \ge 0 \iff (a-y)y \ge |b|^2 \iff y^2 - ay + |b|^2 \le 0$$

$$\iff \frac{a - \sqrt{a^2 - 4|b|^2}}{2} \le y \le \frac{a + \sqrt{a^2 - 4|b|^2}}{2} .$$

Por lo tanto, el mínimo y el máximo de $M(a,b)$ son las soluciones de la Ec. (2.11) para $A = a$ y $B = b$. Esto sucede porque b es “normal” y porque x y b conmutan. En general, las ecuaciones

$$X = A - B^* X^{-1} B \quad \text{y} \quad X = A - B X^{-1} B^*$$

no tienen por que tener las mismas soluciones. Pero si $B = B^*$, sí sabemos que $X_2 = A - X$ y es otra solución de la Ec. (2.11). $\triangle$

Corolario 2.7.7. Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $B \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Entonces se cumplen las condiciones del Teo. 2.7.3 si y sólo si

$$A/2 \in M(A,B) \iff \begin{bmatrix} A/2 & B \\ B & A/2 \end{bmatrix} \ge 0 \iff -\frac{A}{2} \le B \le \frac{A}{2} .$$

Demostración. Observar que $M(A,B)$ es convexo, y $\dfrac{X + (A - X)}{2} = A/2$. Luego la primera equivalencia se sigue de la Obs. 2.7.6. La última ecuación equivale a la del medio por el Cor. 2.2.9. $\square$

Nota: Los resultados de esta sección están basados en los trabajos de Ando [16] y Anderson-Morley-Trapp [12].

2.8 Ejercicios

Ejercicio 2.8.1. Sean $\mathcal{S} \sqsubseteq \mathbb{C}^n$, y $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}^* \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$.

1. $R(\mathbb{SC}(A, \mathcal{S})) = R(A) \cap \mathcal{S}$ y $N(\mathbb{SC}(A, \mathcal{S})) = N(A) + \mathcal{S}^\perp$.
2. Si $A \in \mathcal{G}l(n)^+$, entonces también $\mathbb{SC}(A, \mathcal{S}) > 0$ (pensado en $L(\mathcal{S})$). Más aún, si

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (A^{-1})_{11} & (A^{-1})_{12} \\ (A^{-1})_{21} & (A^{-1})_{22} \end{bmatrix} , \quad \text{entonces} \quad (A^{-1})_{11} = \mathbb{SC}(A, \mathcal{S})^{-1} .$$

3. Dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$ tales que $A \le B$, notemos

$$[A,B] = \{X \in L(\mathcal{H})^+ : A \le X \le B\} .$$

Observar que $[A,B]$ es convexo. Probar que

a. Los puntos extremales de $[0, I]$ son los proyectores autoadjuntos de $L(\mathcal{H})$.

b. Si $A \in \mathcal{G}l(\mathcal{H})^+$, entonces $\text{ext}([0, A]) = \{\mathbb{SC}(A, \mathcal{S}) \ : \ \mathcal{S} \sqsubseteq \mathcal{H}\}$, que incluyen a $0 = \mathbb{SC}(A, \{0\})$ y $A = \mathbb{SC}(A, \mathcal{H})$.

4. Si $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función monótona de operadores tal que $f(0) \leq 0$, entonces, $f(\mathbb{SC}(A, \mathcal{S})) \leq \mathbb{SC}(f(A), \mathcal{S})$.

5. La sucesión $\left\{ \dfrac{\det A}{\big(\det\,(A^m)_{nn}\big)^{1/m}} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ es decreciente, y

$$\mu_n(A) \leq \lim_{m \to \infty} \frac{\det A}{\big(\det\,(A^m)_{nn}\big)^{1/m}} \ .$$

Bibliografía

Libros de Análisis Funcional

[1] Pedersen G. - Analysis Now (GTM 118).

[2] Conway J. - A course in functional analysis (GTM 96, Springer, 1985)

[3] Douglas R. - Banach Algebra Techniques In Operator Theory, 2nd Ed. Ac. Press

[4] Andruchow E. y Corach G. - Notas de análisis funcional (Apunte en pdf).

[5] Stojanoff D. - Un curso de Análisis Funcional.

[6] Stojanoff D. - Análisis Funcional vs, Matricial.

[7] Reed y Simon - Methods of Math Physics Vol 1 (FA) - Ac. Press 1980.

[8] Nagy G., Real analysis, (Kansas State lecture notes, 2001).

[9] Rudin W. - Functional analysis

[10] Yosida, K. - Functional analysis (6ed., GMW 123, Springer, 1980)

Matrices y operadores en espacios de Hilbert

[11] W. N. Anderson Jr. and G. E. Trapp, *Shorted operators II*, SIAM J. Appl. Math., 28 (1975), 60-71.

[12] W. N. Anderson Jr., T. D. Morley and G. E. Trapp, *Positive solutions to* $X = A - BX^{-1}B^*$, Linear Algebra Appl. 134 (1990), 53-62

[13] W. N. Anderson, Shorted operators, SIAM J. Appl. Math. 20 (1971), 520-525.

[14] W. N. Anderson and G. E. Trapp, Shorted operators II, SIAM J. Appl. Math. 28 (1975), 60-71.

[15] T. Ando, Generalized Schur complements, Linear Algebra Appl. 27 (1979), 173-186.

[16] T. Ando; *Structure of Operators with Numerical Radius One*, Acta Sci. Math (Szeged) 34 (1973), 11-15.

[17] T. Ando; *Unitarily invariant norms related to the numerical radius*, Linear Algebra and its Applications, In Press, Corrected Proof, Available online 22 April 2005.

Linear Algebra Appl. 90 (1987), 165-219.

[18] R. Bhatia; *Matrix Analysis*, Springer, New York, 1997.

[19] A. Benedek y R. Panzone; *La matriz positiva y su espectro*, Informe Técnico interno No.86, INMABB, Bahía Blanca, 2003.

[20] R. G. Douglas, On majorization, factorización and range inclusion of operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966) 413-416.

[21] M. C. González; *Relaciones de Mayorización para el Producto de Hadamard*, Tesis de licenciatura, Depto. Mat. FCEA-UNC, Neuquén, 2003.

[22] R. Horn y C. Johnson; *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[23] R. Horn y C. Johnson; *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[24] C.R. Johnson, C.K. Li, *Inequalities relating unitarily invariant norms and the numerical radius*, Linear and Multilinear Algebra 23 (1988) 183-191.

[25] P. D. Lax, Linear Algebra, Springer Verlag, Berlín, 1998.

[26] L. Mirsky, An introducción to Linear Algebra, Clarendon Press, Oxford, 1963.

[27] M. L. Metha, Matrix Theory, 2a Ed., Hindustan Publishing Co. 1989.

[28] R. Bellman, Introducción to Matrix Analysis, 2a Ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

[29] W. F. Donoghue, Jr., Monotone matrix functions and analytic continuation, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[30] A. W. Marshall and I. Olkin, Inequalities: Theory of Mayorization and its Applications, Academic Press, New York, 1979.

[31] V. I. Paulsen, S. C. Power and R.R. Smith, *Schur products and matrix completions*, J. Funct. Anal. 85 (1989), 151-178.

[32] E. L. Pekarev, *Shorts of operators and some extremal problems*, Acta Sci. Math. (Szeged) 56 (1992), 147-163.

[33] B. Simon, Trace ideals and their applications, London Mathematical Society Lecture Note Series, 35, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1979.

Proyecciones oblicuas

[34] E. Andruchow,G. Corach and D. Stojanoff, Geometry of oblique projections, Studia Math. 137 (1) (1999) 61-79.

[35] D. Carlson, What are Schur complements, anyway?, Linear Algebra Appl. 74 (1986), 257-275.

[36] R. W. Cottle, Manifestations of the Schur complement, Linear Algebra Appl. 8 (1974), 189-211.

[37] G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff, Oblique projections and abstract splines, preprint.

[38] G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff, Schur complements and oblique projections, Acta Sci. Math. (Szeged) 67 (2001), 439-459.

[39] J. Dieudonné, Quasi-hermitian operators, Proc. Internat. Symp. Linear Spaces, Jerusalem (1961), 115-122.

[40] M. Golomb, Splines, n-Widths ans optimal approximations, MRC Technical Summary Report 784 (1967).

[41] S. Hassi, Nordström, K.; On projections in a space with an indefinite metric, Linear Algebra Appl. 208/209 (1994), 401-417.

[42] E. Haynsworth, Determinación of the inertia of a partitioned Hermitian matrix, Linear Algebra Appl. 1 (1968), 73-81.

[43] M. G. Krein, The theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian operators and its applications, Mat. Sb. (N. S.) 20 (62) (1947), 431-495

[44] P. D. Lax, Symmetrizable linear transformations, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 633-647.

[45] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen. Math. Zeit. 38 (1934), 177-216.

[46] Z. Pasternak-Winiarski, On the dependence of the orthogonal projector on deformations of the scalar product , Studia Math., 128 (1998), 1-17.

[47] E. L. Pekarev, Shorts of operators and some extremal problems, Acta Sci. Math. (Szeged) 56 (1992), 147-163.

[48] V. Ptak, Extremal operators and oblique projections, Casopis pro pestování Matematiky, 110 (1985), 343-350.

[49] A.C. Thompson, On certain contracción mappings in a partially ordered vector space. Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 438-443.